Olympiades académiques de Mathématiques

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE
Liberté
Égalité
Fraternité

ACADÉMIE DE BESANÇON
Liberté
Égalité
Fraternité

Mercredi 20 mars 2024

Les candidats de la voie générale ayant suivi l'enseignement de spécialité

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet.

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies les noms et prénoms de tous les membres du groupe ainsi que l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Il convient de s'assurer que les noms des candidats sont lisibles et correctement orthographiés.

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées.
Le sujet comprend quatre pages et une annexe.

Exercice 1. Partages de carrés et de rectangles

Partie 1 : Partage de carrés.

Soit n un nombre entier naturel strictement positif.
On dit que n est ***partageable*** lorsque le carré de côté n peut être partagé en exactement n carrés dont les côtés ont des longueurs entières.
Par exemple, les figures ci-dessous nous montrent que les entiers 6, 9 et 11 sont partageables (les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré).

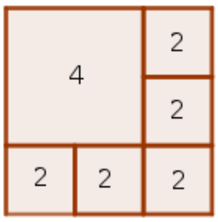


Figure a

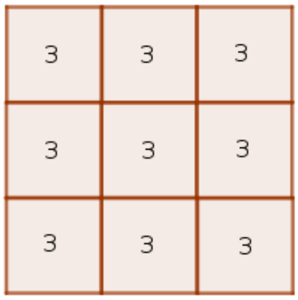


Figure b

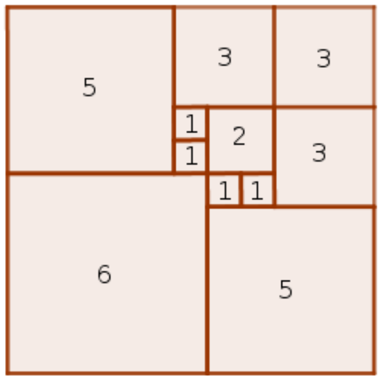


Figure c

Figure a : le carré de côté 6 est partagé en six carrés : un carré de côté 4 et cinq carrés de côté 2.

Figure b : le carré de côté 9 est partagé en neuf carrés de côté 3.

Figure c : le carré de côté 11 est partagé en onze carrés : un carré de côté 6, deux carrés de côté 5, trois carrés de côté 3, un carré de côté 2 et quatre carrés de côté 1.

1. Montrer que le nombre 3 n'est pas partageable.

2. Justifier par une figure que le nombre 4 est partageable.

3. Soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que p^2 est un nombre partageable.

4. **a.** En s'inspirant de la **figure *a*** ci-dessus, montrer que le nombre 8 est un nombre partageable.
   b. Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(2p)^2 = (2p-2)^2 + 2^2(2p-1)$.
   c. Le nombre 2024 est-il partageable ? Si oui, proposer un partage qui l'illustre.
   d. Montrer alors que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est partageable.

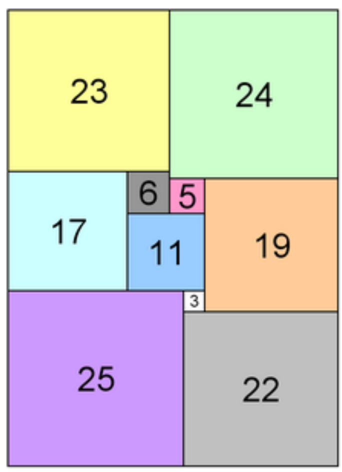
5. **a.** Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(3p)^2 = (3p-3)^2 + 3^3(2p-1)$.
   b. Construire alors une figure qui montre que 15 est partageable.

Partie 2 : Partage de rectangles.

On appelle rectangle *parfait* un rectangle composé de carrés dont les mesures des côtés sont des nombres entiers tous distincts.
Ci-contre, un exemple où les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré.
L'objectif de cette partie est de construire un autre rectangle parfait, composé celui-ci de neuf carrés dont les mesures des côtés sont

$$1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18$$

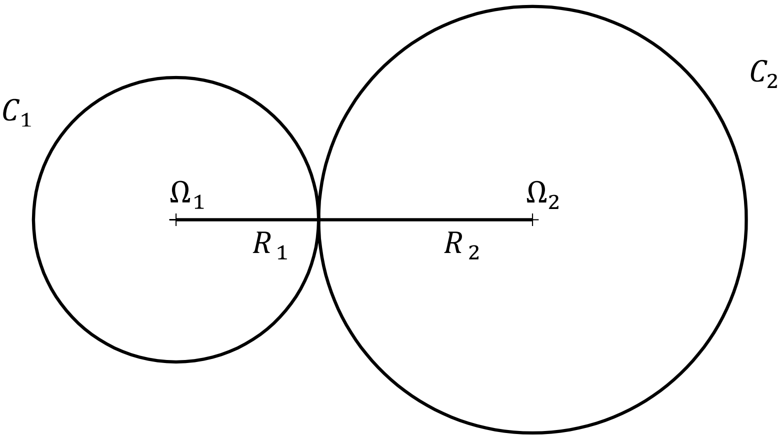
Il s'agit du plus petit rectangle parfait possible.
On donne **en annexe**, un des côtés de ce rectangle. Grâce aux carrés fournis qui composent le partage de ce rectangle, terminer alors la partition de celui-ci. On expliquera la démarche, même si elle n'aboutit pas. On pourra découper et coller les carrés fournis sur le début de rectangle.



Exercices 2. Cercles de Ford

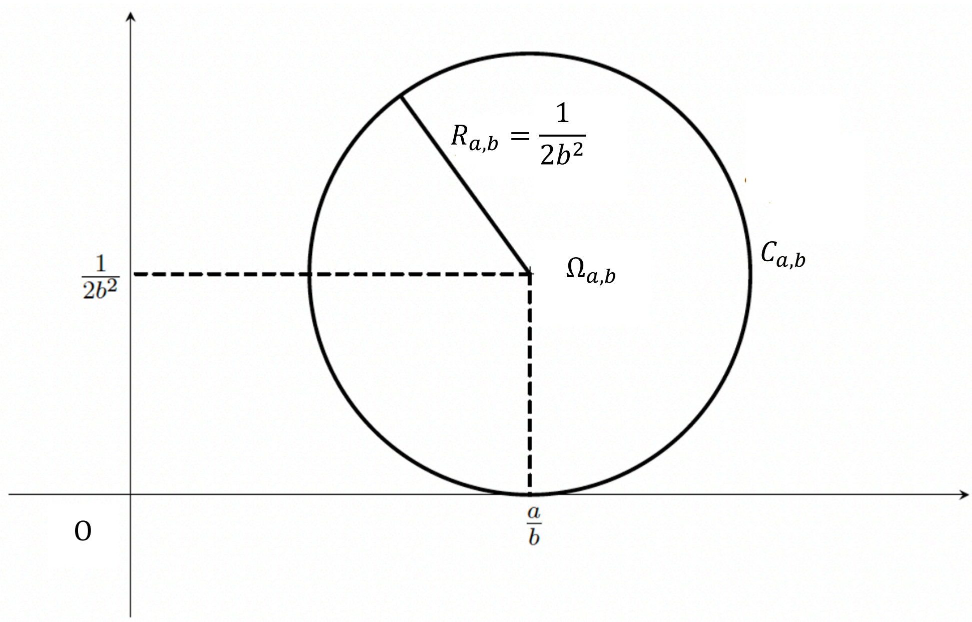
On rappelle que la distance entre deux nombres réels a et b est le nombre $|b-a| = \begin{cases} b-a & \text{si } a < b \\ a-b & \text{si } a > b \end{cases}$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit C_1 et C_2 deux cercles de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2.
On dit que C_1 et C_2 sont **tangents extérieurement** si et seulement si la distance entre Ω_1 et Ω_2 est égale à la somme des rayons des deux cercles c'est-à-dire $\Omega_1\Omega_2 = R_1 + R_2$.



Soit, a et b deux nombres entiers naturels, avec b non nul. On rappelle qu'une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible si le plus grand commun diviseur de a et b est 1. Autrement dit que a et b n'ont que 1 comme diviseur commun.

Étant donné une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ on note $C_{a,b}$ le cercle de centre $\Omega_{a,b}\left(\frac{a}{b}\,;\frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $R_{a,b} = \frac{1}{2b^2}$.
Le cercle $C_{a,b}$ est appelé le **cercle de Ford** associé à la fraction irréductible $\frac{a}{b}$.



Ainsi, par exemple, le cercle de Ford $C_{2,3}$ associé à la fraction $\frac{2}{3}$ est le cercle de centre $\Omega_{2,3}\left(\frac{2}{3};\frac{1}{18}\right)$.

1. **a.** Déterminer les centres $\Omega_{0,1}$, $\Omega_{1,2}$ et $\Omega_{1,1}$ et les rayons $R_{0,1}$, $R_{1,2}$ et $R_{1,1}$ des cercles de Ford $C_{0,1}$, $C_{1,2}$ et $C_{1,1}$ respectivement associés aux fractions $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1}$.

b. Représenter dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ les cercles $C_{0,1}$, $C_{1,2}$ et $C_{1,1}$ en prenant comme unité 8 cm.

c. Montrer que les cercles $C_{0,1}$, $C_{1,2}$ et $C_{1,1}$sont deux à deux tangents extérieurement.

d. On rappelle qu'une droite (d) est tangente à un cercle C de centre A et de rayon $r > 0$, si la distance du point A à la droite (d) est égale à r. Autrement dit, si $\mathrm{AH} = r$ où H est le projeté orthogonale du point A sur la droite (d).
Soit une fraction irréductible $\frac{a}{b}$.
Montrer que le cercle $C_{a,b}$ est tangent à l'axe des abscisses en un point que l'on précisera.

2. Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles différentes. On note D la distance entre $\Omega_{a,b}$ et $\Omega_{c,d}$.

a. Montrer que

$$D^2 - \left(R_{a,b} + R_{c,d}\right)^2 = \frac{(ad - bc)^2}{b^2d^2} - \frac{1}{b^2d^2}$$

b. En déduire que les cercles de Ford $C_{a,b}$ et $C_{c,d}$ sont tangents extérieurement si et seulement si $|ad - bc| = 1$ et que, dans les autres cas, l'intersection de $C_{a,b}$ et $C_{c,d}$ est vide.

3. Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $|ad - bc| = 1$.
On veut montrer que $\frac{a+c}{b+d}$ est une fraction irréductible. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant que l'on peut simplifier la fraction, c'est-à-dire qu'il existe un entier $n > 1$ qui divise à la fois $a + c$ et $b + d$.

a. Calculer

$$|(a + c)d - (b + d)c|$$

b. Aboutir à une contradiction et conclure.

4. On considère $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles telles que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ et $|\, ad - bc \,| = 1$.
On veut montrer qu'il existe une fraction irréductible $\frac{u}{v}$ telle que $\frac{a}{b} < \frac{u}{v} < \frac{c}{d}$ et tel que le cercle de Ford associé à $\frac{u}{v}$ soit tangent extérieurement à la fois à $C_{a,b}$ et à $C_{c,d}$.

a. Justifier que $ad - bc = -1$.

b. Soit $\frac{u}{v}$ une fraction irréductible telle que $\frac{a}{b} < \frac{u}{v} < \frac{c}{d}$.
On suppose que $C_{u,v}$ est tangent extérieurement à $C_{a,b}$ et $C_{c,d}$.
Montrer que

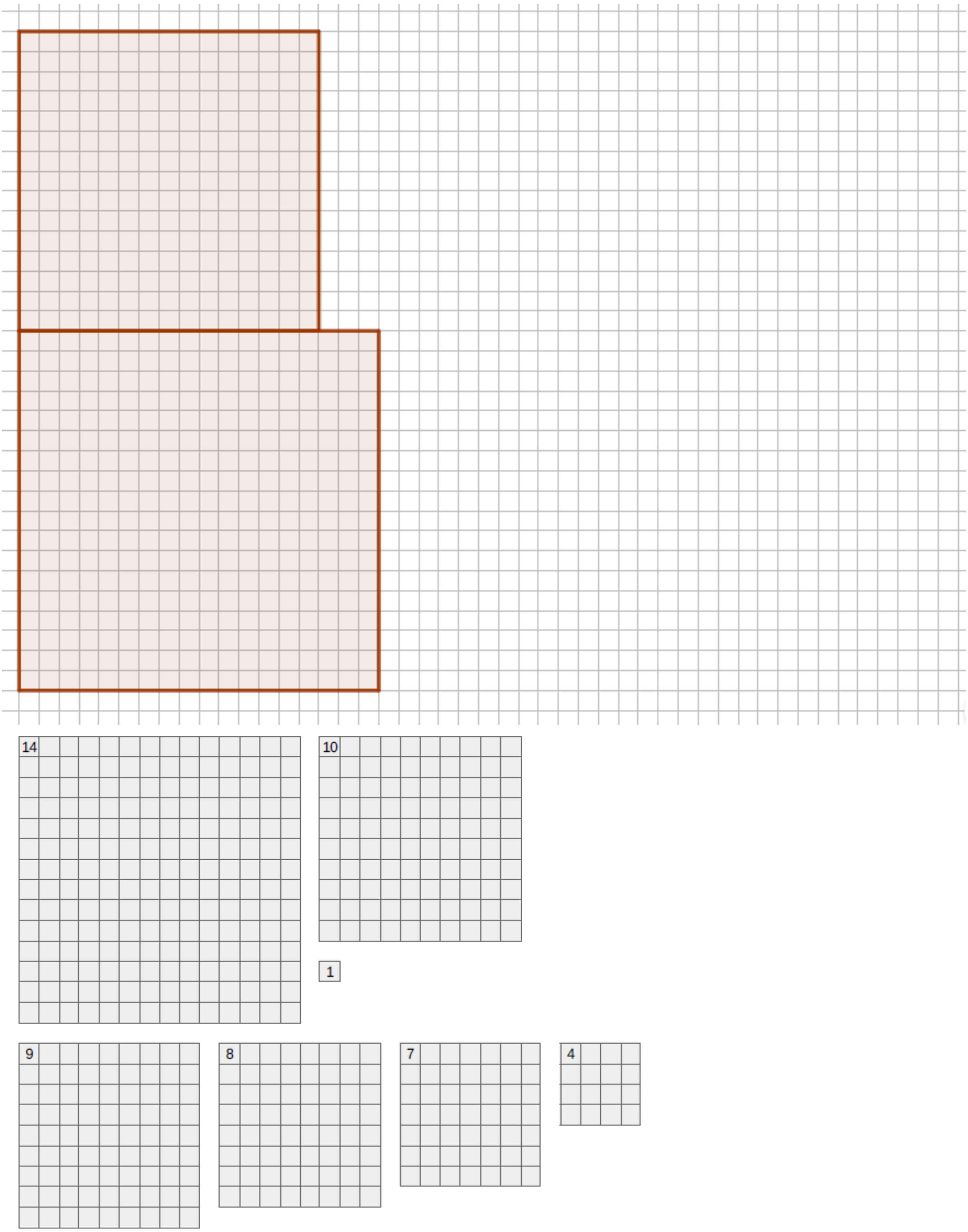
$$\begin{cases} av - bu = -1 \\ cv - du = 1 \end{cases}$$

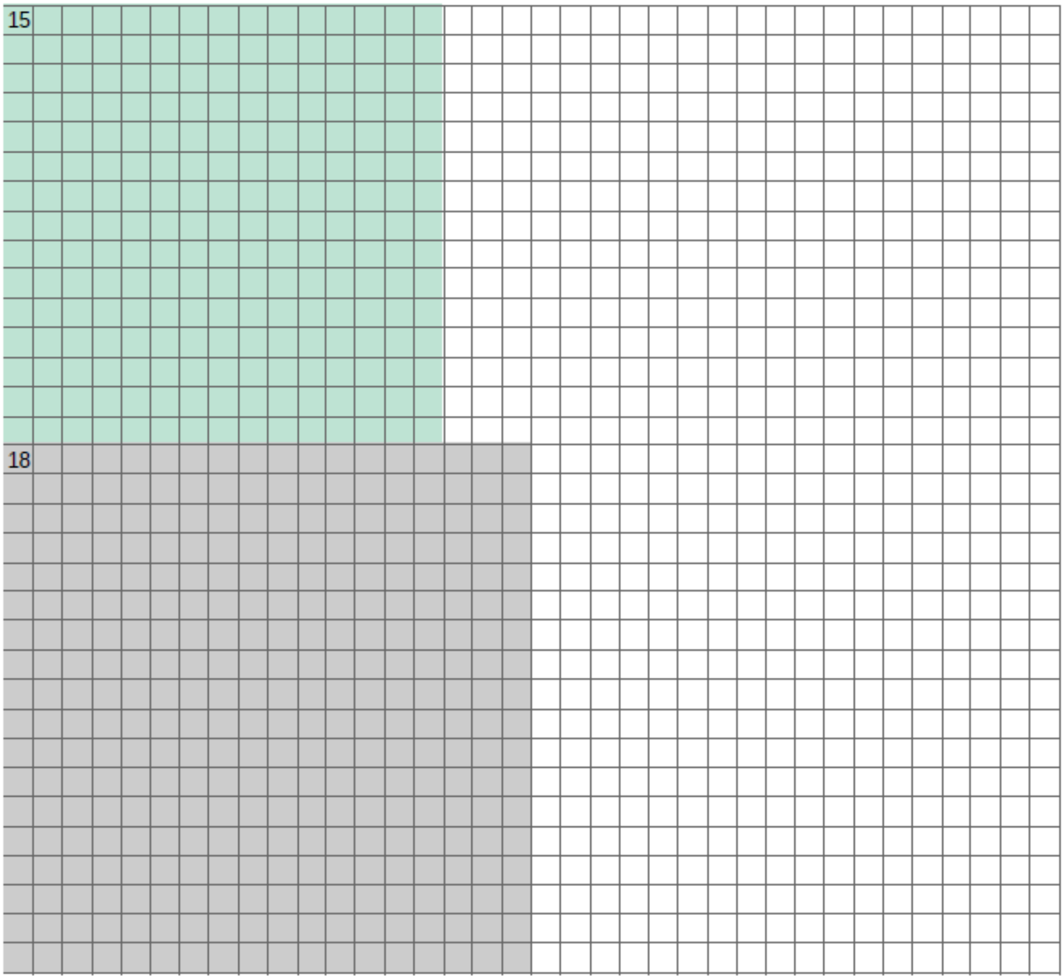
c. Résoudre le système et en déduire que $u = a + c$ et $v = b + d$.

d. Conclure.

Annexe – A rendre agrafée avec la copie

Noms des candidats :




15
18