

Olympiades académiques de Mathématiques



Mercredi 20 mars 2024

Les candidats ne suivant pas l'enseignement de spécialité

C'est-à-dire ceux de la voie générale **N'**ayant **PAS** choisi l'enseignement de spécialité mathématiques, et **TOUS** ceux de la voie technologique (STI2D, STL, ST2S, STMG, STHR, ST2A, STAV, S2TMD, etc.)

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique. Cependant, le mode examen devra être activé devant les surveillants.

Tous les candidats traiteront les deux exercices que contient ce sujet.

Les candidats indiqueront dans l'en-tête de leurs copies les noms et prénoms de tous les membres du groupe ainsi que l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Il convient de s'assurer que les noms des candidats sont lisibles et correctement orthographiés.

Sauf cas de force majeure, aucun élève n'est autorisé à quitter définitivement la salle moins d'une heure après le début de l'épreuve.

Il est conseillé aux candidats de bien argumenter leurs affirmations. Dans le cas où ils ne pourraient rendre une réponse complète, il est important d'exposer les recherches effectuées. Le sujet comprend cinq pages.



NUMWORKS

Exercice 1. Partages de carrés et de rectangles

Partie 1 : Partage de carrés.

Soit n un nombre entier naturel strictement positif.

On dit que n est **partageable** lorsque le carré de côté n peut être partagé en exactement n carrés dont les côtés ont des longueurs entières.

Par exemple, les figures ci-dessous nous montrent que les entiers 6, 9 et 11 sont partageables (les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré).

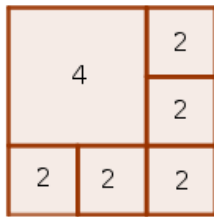


Figure a

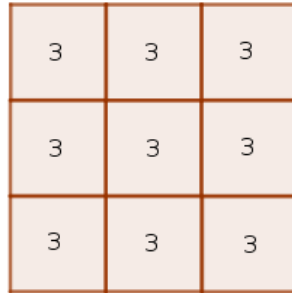


Figure b

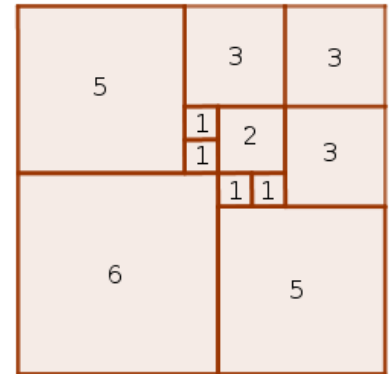


Figure c

Figure a : le carré de côté 6 est partagé en six carrés : un carré de côté 4 et cinq carrés de côté 2.

Figure b : le carré de côté 9 est partagé en neuf carrés de côté 3.

Figure c : le carré de côté 11 est partagé en onze carrés : un carré de côté 6, deux carrés de côté 5, trois carrés de côté 3, un carré de côté 2 et quatre carrés de côté 1.

- 1) Montrer que le nombre 3 n'est pas partageable.
- 2) Justifier par une figure que le nombre 4 est partageable.
- 3) Soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que p^2 est un nombre partageable.
- 4)
 - a. En s'inspirant de la **figure a** ci-dessus, montrer que le nombre 8 est un nombre partageable.
 - b. Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(2p)^2 = (2p - 2)^2 + 2^2(2p - 1)$.
 - c. Le nombre 2024 est-il partageable ? Si oui, proposer un partage qui l'illustre.
 - d. Montrer alors que tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est partageable.
- 5)
 - a. Soit p un nombre entier naturel non nul, montrer que $(3p)^2 = (3p - 3)^2 + 3^2(2p - 1)$.
 - b. Construire alors une figure qui montre que 15 est partageable.

Partie 2 : Partage de rectangles.

On appelle rectangle **parfait** un rectangle composé de carrés dont les mesures des côtés sont des nombres entiers tous distincts.

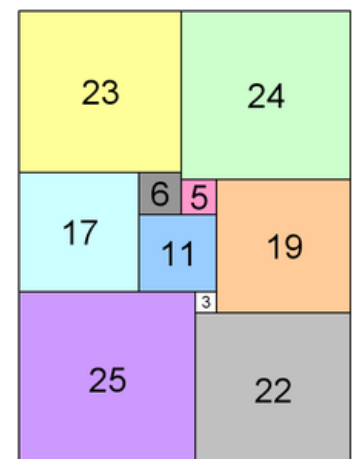
Ci-contre, un exemple où les nombres entiers inscrits à l'intérieur de chaque carré indiquent la longueur du côté du carré.

L'objectif de cette partie est de construire un autre rectangle parfait, composé celui-ci de neuf carrés dont les mesures des côtés sont

$$1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18$$

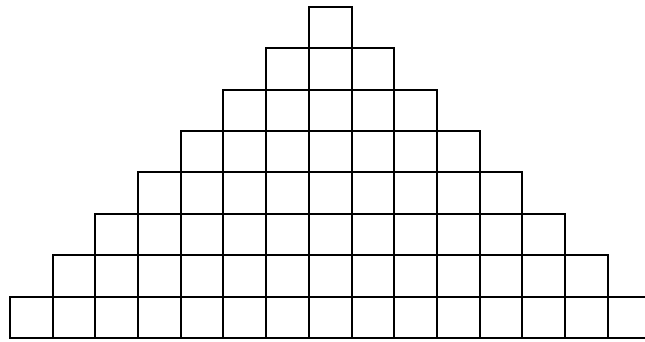
Il s'agit du plus petit rectangle parfait possible.

On donne **en annexe**, un des côtés de ce rectangle. Grâce aux carrés fournis qui composent le partage de ce rectangle, terminer alors la partition de celui-ci. On expliquera la démarche, même si elle n'aboutit pas. On pourra découper et coller les carrés fournis sur le début de rectangle.



Exercice 2. Pyramides de nombres

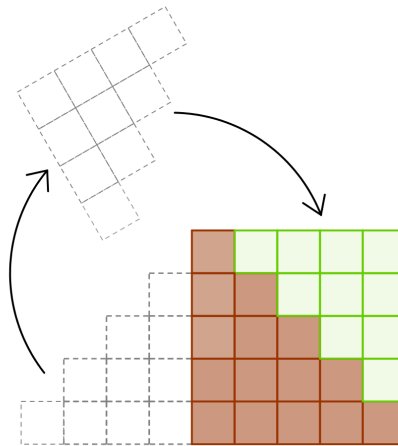
On construit une pyramide en superposant des cases comme sur la figure ci-dessous :



L'étage supérieur est constitué d'une case et chaque étage possède deux cases de plus que l'étage situé juste au-dessus.

Partie 1. Pyramides

1. Combien de cases contient une telle pyramide de 5 étages ?
2. En vous inspirant du schéma ci-dessous, calculer le nombre de cases contenues dans une pyramide de 10 étages.



3. Soit n , un entier naturel non nul.
Quel est, en fonction de n , le nombre de cases contenues dans une pyramide de n étages ?

Partie 2. Numérotation

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul quelconque.

On suppose que la pyramide est infinie et on y place les entiers selon la disposition suivante :

	...	C_{-4}	C_{-3}	C_{-2}	C_{-1}	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	...			
L_1						1								
L_2					2	3	4							
L_3				5	6	7	8	9						
L_4			10	11	12	13	14	15	16					
L_5			17	18	19	20	21	22	23	24	25			
\vdots			26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	
		37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
												

Numérotation des lignes

1. Les lignes sont numérotées à partir du haut.
La première ligne qui contient le nombre 1 sera notée ligne L_1 , celle juste en dessous L_2 , etc.
Quel est le dernier nombre de la ligne L_{10} ?
2. Exprimer, en fonction de n , le dernier nombre de la ligne L_n .

Numérotation des colonnes

On nomme la colonne centrale C_0 .

On nomme les colonnes à sa droite C_1, C_2, C_3, \dots et les colonnes à sa gauche $C_{-1}, C_{-2}, C_{-3} \dots$

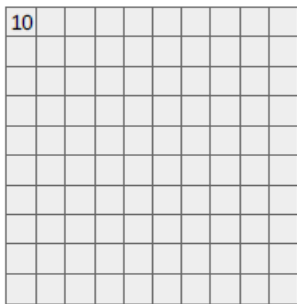
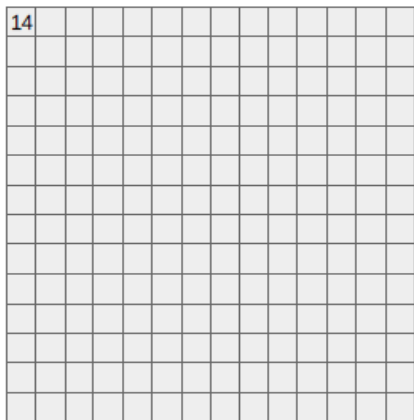
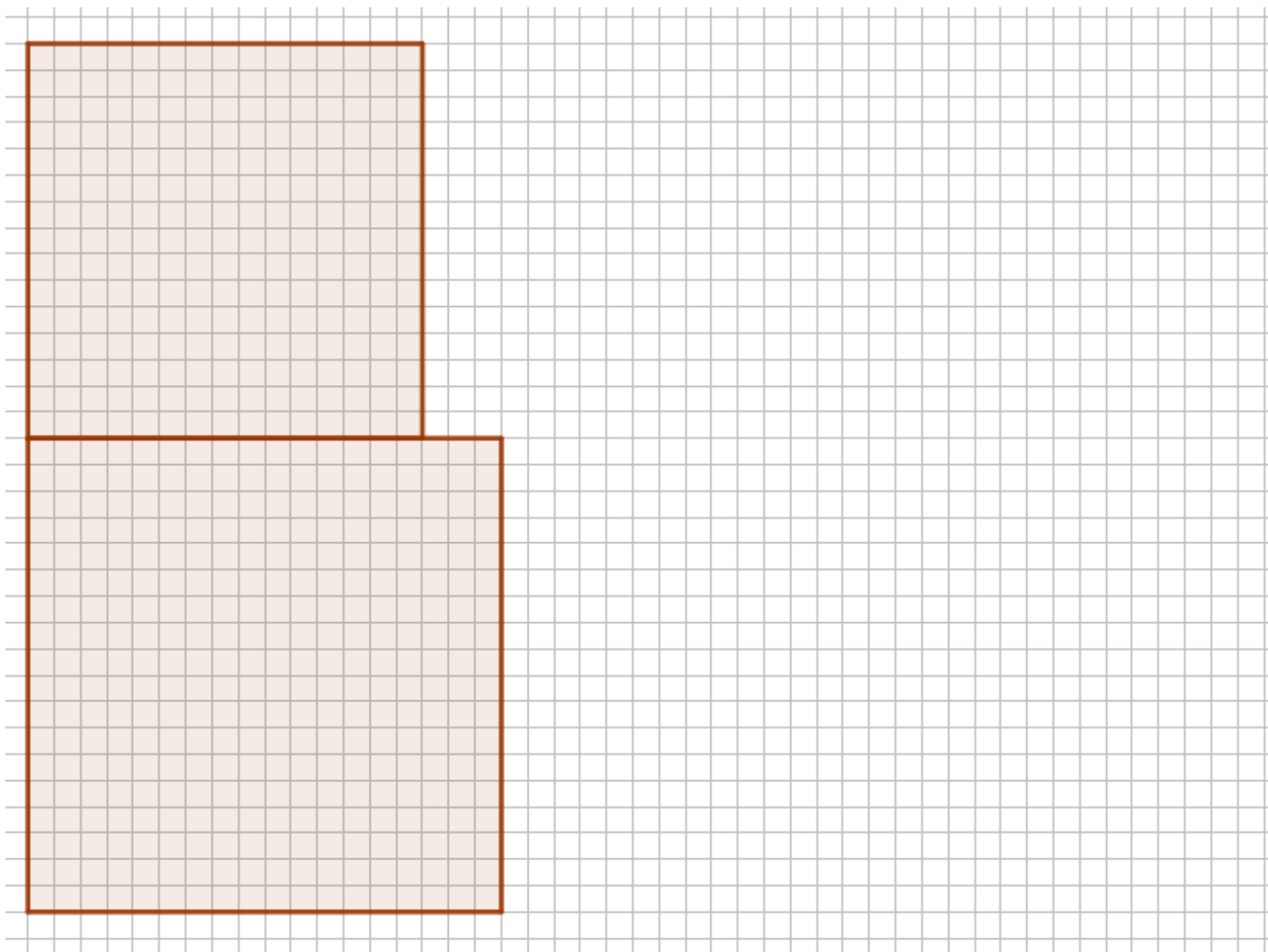
3. Combien la Ligne L_4 comporte-t-elle de cases ?
Quels noms portent les colonnes qui la composent ?
4. Quel nom porte la colonne qui débute à la première case de la ligne L_n ?
5. Quel nom porte la colonne qui débute à la dernière case de la ligne L_n ?
6. Quel est le premier nombre de la colonne C_{12} ?
7. Quel est le premier nombre de la colonne C_n ?
8. Quel est le premier nombre de la colonne C_{-10} ?
9. Quel est le premier nombre de la colonne C_{-n} ?
10. Quel nom porte la colonne qui commence par le nombre 530 ?

Intersections

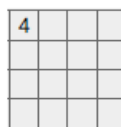
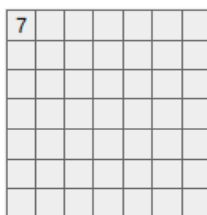
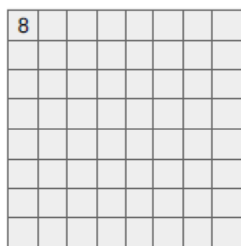
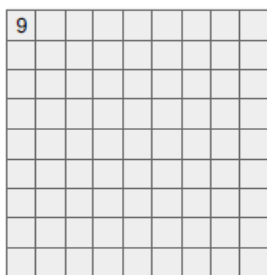
11. Quel nombre se trouve à l'intersection de la colonne C_0 et de la ligne L_{14} ?
12. Exprimer en fonction de n , le nombre se trouvant à l'intersection de la colonne C_0 et de la ligne L_n .
13. A l'intersection de quelle ligne et de quelle colonne trouverons-nous le nombre 2024 ?
Et le nombre 11 111 ?

Annexe – À rendre agrafée avec la copie

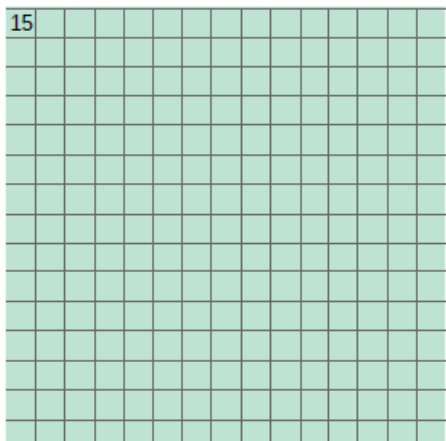
Noms des candidats :



1



15



18

