Utilisation d'outil numériques pour contourner les difficultés calculatoires
Mettre en situation de réussite les bacheliers professionnels en STS

*Ces exercices sont écrits pour développer les compétences des élèves de STS issu du bac professionnel*
*On évite les difficultés calculatoires pour avoir le temps de manipuler avec Geogebra avec de construire une conceptualisation.*
*L'objectif est de résoudre ces exercices avec Geogebra et de commenter la solution.*

## BAC À SABLE, factorisation, hors BTS...

Ex n° **1** *Second degré*

**1.** (a) Développer l'expression : $(x+2)^2+1$

(b) Construire la courbe représentative de la fonction $f$ définie pour tout nombre réel $x$ par $f(x)=x^2+4x+5$, que dire de la position du sommet $S$ de la parabole obtenue ?

**2.** (a) Donner la forme canonique et la forme développée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3(x+1)(x-3)$

(b) Démontrer que ces trois résultats sont égaux pour tout $x$ réel.

## (In)équations : CALCULER et REPRÉSENTER

Ex n° **2** *(In)équations*

**1.** Résoudre les inéquations suivantes :

• $\ln(x)\geq 2$ • $2+5x\leq x+6$ • $\ln(2+5x)\leq \ln(x+6)$

**2.** Illustrer ces résultats à l'aide d'une représentation graphique adaptée.

## Limites : CALCULER pour COMMUNIQUER

Ex n° **3** *Limites*

**1.** Calculer les limites suivantes :

- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{1}{1+h}$
- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{1+2h}{h}$
- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{1}{1+h}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x-x^2}{x^2-3x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x-x^2}{x^2-3x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-x-x^2}{x^3-3x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2}$

**2.** Comment justifier ces résultats obtenus dans chaque colonne ?

**3.** On considère la fonction $f$ définie par sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x+1}$. Quelles sont les asymptotes à la courbe représentative de la fonction $f$ ?

## Dérivation, appréhender le cours

Ex n° **4** *Comprendre une définition*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.

**1.** Calcule $\tau(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

**2.** Déterminer $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \tau(h)$

**3.** Quel est la valeur du coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse $a$ ?

**4.** Modifier la fonction $f$ pour obtenir l'expression de la fonction dérivée de la fonction inverse.

# Fonction ln : CALCULER et REPRÉSENTER

Ex n° **5** *Fonction logarithme*

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ que l'on représente dans un zone graphique.

**1.** Utiliser la fonction Intégrale en zone de saisie pour mesurer l'aire de la partie du plan comprise entre :

- L'hyperbole représentative de la fonction $f$
- Les droites d'équation $x=1$ et $x=2$
- L'axe des abscisses.

**2.** Construire un curseur nommé A qui représente un nombre que l'on peut faire varier de $0,01$ à $100$ avec un incrément égal à $0,1$.

**3.** On considère la fonction qui a tout nombre réel strictement positif $A$ associe la valeur de l'intégrale de $f$ entre les valeurs 1 et $A$. Compléter le tableau de valeurs :

| 0.01 | 0.1 | 0.25 | 0.5 | 1 | 2 | 4 | 10 | 100 | 200 | 400 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

**4.** Pour quelle valeur obtient-on une aire égale à 1 ?

# Dérivée et exponentielle : CALCULER pas à pas

Ex n° **6** *Geogebra et la fonction exponentielle*

**1.** Soit $u$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, utiliser Geogebra pour rappeler la forme de la dérivée de $e^u$ :

$$(e^u)' = \ldots\ldots$$

**2.** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2e^{-x^2}$

(a) Déterminer les limites de la fonctions $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$

(b) Déterminer $f'$, la fonction dérivée de $f$

(c) Déterminer le signe de $f'$ pour $x\in\mathbb{R}$ et construire le tableau de variation de $f$.

(d) Construire la courbe représentative de la fonction $f$. Vos résultats sont-ils cohérent avec cette représentation graphique ?

Ex n° **7** *Fonction exponentielle, modélisation*

Suite à un accident, un détecteur mesure la concentration monoxyde de monoxyde de carbone carbone en fonction du temps, exprimé en minutes après l'accident.

La concentration de monoxyde de carbone exprimée en ppm dans la pièce en fonction du temps, exprimé en heures, est modélisée par la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(t)=2,2+200te^{-t}$$

**1.** Calculer la concentration de monoxyde de carbone en ppm dans la pièce :

(a) au moment de l'accident

(b) 30 minutes après

(c) lorsque $t$ tend vers $+\infty$.

**2.** On note $f$ la fonction dérivée de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

(a) Donner une expression de $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$

(b) Donner le signe de $f'$ et construire le tableau de variation de $f$ sur $]0;+\infty[$

Ex n° **8** *Un calcul de probabilité*

En médecine, une étude montre que l'on peut calculer la probabilité d'avoir un problème cardiaque en fonction de son âge est $g(x)=\dfrac{1}{1+15,2e^{-0,054x}}$ où $x\in[0;+\infty[$ est l'âge du patient *(en année)*.

**1.** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. La courbe admet-elle une asymptote ?

**2.** Calculer $g'(x)$ et donner le signe de $g'$ pour $x\in\mathbb{R}$. Construire le tableau de variation de $g$ sur $[0;+\infty[$.

**3.** Vérifier que votre tableau de variation est cohérent avec la représentation graphique de la fonction $g$

**4.** Quelle équation faut-il résoudre pour déterminer l'âge à partir duquel la probabilité d'avoir un problème cardiaque est égale à $0,5$ ? Résoudre cette équation.

# Primitive : CALCULER et MODÉLISER

## En cinématique

Dans cette partie, on illustre la notion de fonction dérivée et de primitive à l'aide de la cinématique. Il s'agit aussi d'aller vers les équations différentielles et la résolution d'un problème de Cauchy.

Ex n° **9** *On accélère pas vite...*

On considère ici un point matériel *(qui peut représenter le centre d'inertie d'un solide)*.
Ce point se déplace en fonction du temps *(On note $t$ la variable temps, exprimée en seconde)*, la distance $f$ parcourue par ce point est exprimée en mètre et on a $f(t) = 10t + 5$.

**1**. Quelle est la vitesse instantanée à $t = 2s$ ? $t = 5s$

**2**. Que peut-on dire de la vitesse de ce point matériel ?

Ex n° **10** *Effet d'une accélération constante*

On suppose que $f''(t) = 4$

**1**. Quelle peut alors être la fonction $f'$ si au l'instant initial $t = 0$, $f'(t) = 0$ ?

**2**. Quelle peut être la fonction $f$ si à l'instant initial $t = 0$, $f(t) = 0$ ?

**3**. Dans quel cas concret peut-on retrouver cette configuration ?

On rappelle le principe fondamental de la dynamique qui ici se restreint à utiliser que : $\overrightarrow{P} = mg$ où $m$ représente la masse d'un corps et $g$ l'accélération de la pesanteur *(environ 9,81 $m/s^2$*.

Ex n° **11** *Chute d'un corps*

Lorsqu'on laisse tomber un objet sa vitesse augmente proportionnellement au temps de la chute *(on parle de l'accélération de la pesanteur)*. Il existe donc un coefficient $g$ tel que $v = gt$. Des mesures physiques indiquent que $g \approx 9,81$. On se trouve en présence d'un mouvement uniformément accéléré.

**1**. Quelle est la fonction qui donne la distance parcourue en considérant que l'objet est lâché à l'instant 0 et qu'il se trouve alors au point d'abscisse 0 ?

**2**. Si on lâche l'objet d'une hauteur de 20m, quelle sera la durée de sa chute ? Quelle sera sa vitesse au moment où il atteint le sol ?

Ex n° **12** *Chute d'un corps 2*

Un élève au comportement inquiétant décide de jeter son professeur de mathématique par la fenêtre, excéder par la volonté de se dernier à le forcer à écrire... On considèrera que le pauvre professeur, que l'on assimilera à un point matériel, est lâché à la verticale du 3 ème étape *(on comptera 3m pour un étage)* de son lycée. A quelle vitesse le pauvre professeur *(qui pèse pourtant ses 90 kg)* va-t-il se fracasser sur le sol ?

Ex n° **13** *Voyage dans l'espace*

Dans l'espace, un corps se déplace dans les « 3 dimensions ». On décrit alors son mouvement par 3 fonctions, une pour chaque axe. On parle alors du vecteur déplacement et du vecteur vitesse.

**1**. On donne les coordonnées du point $M$ en fonction du temps $t$ sous la forme : $\overrightarrow{OM}\left|\begin{array}{c} \text{100-2t} \\ 0 \\ \frac{1}{2}e^t \end{array}\right.$ , donner le vecteur vitesse à l'instant $t = 1$

**2**. Calculer la vitesse instantanée à l'instant $t = 0$*( c'est la norme du vecteur vitesse.)*

**3**. Donner de même les composantes du vecteur accélération quant $t = 0$ et calculer sa norme.

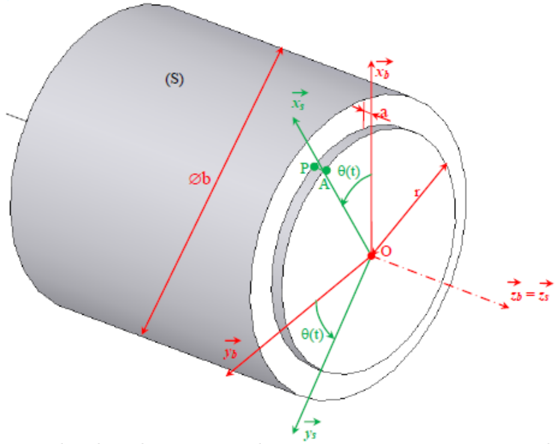
**4**. Exprimer la norme du vecteur vitesse en fonction de $t$ et la norme du vecteur accélération en fonction de $t$.

**5**. Comment varie l'accélération en fonction du temps $t$ ?

**6**. Comment varie l'accélération en fonction du temps $t$ ?

## Ex n° 14 *Pour la transition vers la mécanique...*

Remarque : En pré-requis, on peut réserver une séance sur des rappels en trigonométrie, qui permette de comprendre les formules de projections et d'expliciter le lien entre vitesse de rotation et fréquence angulaire.



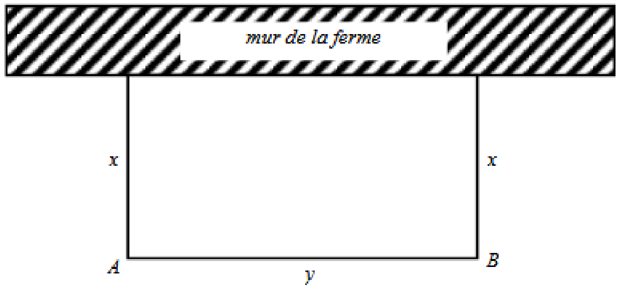

Pendant l'usinage d'un cylindre, la vitesse de rotation est assez grande pour que l'on puisse supposer que pendant un tour de mandrin, la variation des grandeurs notées $r$ et de $a$ sont négligeables.

1. Exprimer alors les composantes du vecteur $\overrightarrow{OP}$ en fonction $t$ *(et de l'angle et de l'angle $\theta(t)$)* dans le repère $\left(O, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$
2. Exprimer alors les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_P}$ du point $P$ en fonction du temps $t$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{x_b}, \overrightarrow{y_b}, \overrightarrow{z_b}\right)$ .
3. Exprimer alors $\| \overrightarrow{V_P} \|$ la vitesse du point $P$ en fonction du temps. C'est ce qu'on l'on appelle la vitesse de coupe que l'on note $V_c$. Quelle est l'unité de $V_c$ ?
4. On rappelle alors que, lorsque la vitesse de rotation du mandrin est égale à $N$ tour par minute, la fréquence angulaire est la fonction définie par $\Theta'(t) = \dfrac{\pi N}{30}$, exprimer alors $V_c$ en fonction de $N$.
5. On souhaite alors respecter une vitesse de coupe $V_c$ de 20m/mn soit $\dfrac{1}{3}$ m/s. Exprimer $N$ en fonction de $N$ et de $r$.
6. Construire la courbe représentative de cette fonction :
   - La fréquence de rotation de la broche du tour lorsque le dressage commence ?
   - La limite de la fréquence de rotation de la broche du tour lorsque l'outil à dresser se rapproche du centre ? Que se passera-t-il en pratique ?

# Optimisation, CALCULER pour MODÉLISER

## Ex n° 15 *Les meilleurs rectangles*

1. Un fermier décide de réaliser un poulailler (en forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392 m². Où doit-on placer les piquets $A$ et $B$ pour que la longueur de la clôture soit minimale ?




2. Soit $p$ un nombre réel strictement positif. Parmi tous les rectangles de périmètre $p$, lequel a la plus grande aire ?

## Ex n° 16 *Cône maximal*

On dispose de billes en bois de différentes taille et on souhaite sculpter dans chacune d'entre elles le plus grand cône de revolution possible.

1. Représenter un cône inscrit dans la bille *(voir le fichier geogebra en pièce jointe au cahier de texte)* où on a notera :
   - $O$ le centre de la bille
   - $A$ le sommet du cône, $A'$ son symétrique par rapport à $O$
   - $H$ un point de $[OA']$
   - $h$ la hauteur du cône.
   - $B$ un point de la boule tel que $[HB]$ est un rayon de la base du cône.
2. Déterminer la position du point $H$ pour que le volume du cône soit maximal.

Ex n° **17** *Maths appliquées à l'économie*

Une entreprise fabrique des objets. La production peut varier de $0$ à $300$ unités. Le coût total de fabrication en euros de $x$ unités est donné par la fonction :

$$C_t(x) = \frac{1}{30}x^3 - 15x^2 + 2500x$$

On suppose que l'entreprise est en situation de monopole, ce qui a pour effet que la demande est uniquement fonction du prix. La relation liant prix de vente unitaire $p$ et demande $x$ (en unités) est :

$$p(x) = -\frac{45}{8}x + 2750$$

(C'est à dire que quand $x$ objets sont vendus, chacun l'est au prix $p(x)$)

**1**. On appelle coût marginal la dépense occasionnée par la production d'un objet supplémentaire , expliquer pourquoi on peut supposer que le coût marginal est presque égale à $C_t'(x)$.

**2**. Calculer la recette totale $R_t(x)$ pour la vente de $x$ unités.

**3**. On appelle recette marginale l'augmentation de recette procurée par la vente d'un objet supplémentaire. On modélise cette recette marginale par : $R_m(x) = R_t'(x)$. Justifier le bénéfice est maximal quand la recette marginale est égale au coût marginal.

# Calcul intégral : CALCULER, REPRÉSENTER pour CALCULER !

Ex n° **18** *Notion de primitive*

Soit une fonction $f$ continue sur un intervalle $I$.

Une primitive de $f$ est une fonction définie sur $I$ et telle que : $\boxed{\forall x \in I, F'(x) = f(x)}$

**1**. Donner une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+1$

**2**. Entrer la commande Intégrale(f(x)) dans une cellule du module de calcul formel de Geogebra, comment interpréter la réponse obtenue ?

**3**. Entrer Intégrale(f(x),0,2) dans une cellule du calcul formel et dans le "Champ de saisie". Que semble représenter ce résultat ?

**4**. Soit $F$ une primitive de la fonction $f$. Calculer $F(2) - F(0)$ où $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$, que remarque-t-on ?

**5**. Vérifier que ce procédé de calcul reste valable pour calculer l'intégrale de $f$ entre les bornes $0$ et $5$

Ex n° **19** *Intégrale, curseur, utiliser une limite du calcul formel.*

**1**. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

(a) Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

(b) Utiliser cette primitive pour calculer l'intégrale de $f$ entre les valeurs $0$ et $1$.

**2**. Soit $n$ un entier naturel avec $n \geq 1$. Créer un curseur qui représente cette entier dans une fenêtre graphique de Geogebra.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$

(a) Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

(b) Utiliser cette primitive pour exprimer l'intégrale de $f$ entre les valeurs $0$ et $1$.

(c) Quelle est la limite de cette intégrale quand $n$ tend vers $+\infty$ ?

**3**. On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

(a) Déterminer une primitive de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$

(b) Utiliser cette primitive pour calculer l'intégrale de $f$ entre les valeurs $1$ et $A$ où $A \in \mathbb{R}$. On note ce résultat $I_A = \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^2}\,dx$.

(c) Déterminer la limite de $I_A$ quand $A$ tend vers $+\infty$

(d) Reprendre les questions précédentes avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

# Probabilités : REPRÉSENTER pour CALCULER

Ex n° **20** *Pas toujours la loi binomiale... Sortir des mauvais réflexes avec Geogebra*

Une étude statistique a montré que, dans un centre hospitalier, chaque jour :

- la probabilité d'avoir deux urgences est de $20\%$
- la probabilité d'avoir une urgence est de $70\%$
- la probabilité de n'avoir aucune urgence est de $10\%$

On suppose que les nombres d'urgences d'un jour à l'autre sont indépendants.

Un médecin est de service aux urgences pendant deux jours, on s'intéresse aux nombres $X$ d'urgences qu'est susceptible de traiter ce médecin durant cette durée.

**1**. Quelles sont les valeurs possibles pour $X$ ?

**2**. Justifier que $P(X=3)=0,284$

**3**. Donner la **loi de probabilités** de $X$ dans un tableau *(Il s'agit donc de donner toutes les valeurs de $P(X=k)$)*

**4**. Déterminer la probabilités que le médecin ait au moins une urgence à traiter.

**5**. Donner le nombre moyen d'urgences qu'est susceptible de traiter le médecin (arrondir à l'entier le plus proche)

**6**. A partir de combien de jours de remplacement la probabilité d'avoir au moins une urgence dépasse-t-elle strictement $99,999\%$ ?