Seconde	Démonstration 1/3 non décimal

Prérequis pour la démonstration

- Simplifier une fraction $\frac{k\times a}{k\times b}=\frac{a}{b}$
- Unicité de la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

Objectif

L’objectif de cette activité est que tout élève comprenne pourquoi $\frac{1}{8}$ est décimal et pourquoi $\frac{1}{3}$n'est pas décimal. La fiche élève proposée ci-dessous permet une différentiation.

Pour les élèves scientifiques, la cible est aussi de travailler sur les conditions nécessaires, suffisantes, nécessaires & suffisantes et de distinguer le vocabulaire « développement décimal d'un nombre » et « nombre décimal ». Un prolongement est de travailler sur la périodicité du développement décimal et nombre rationnel.

Fiche élève :

Définition : Un nombre est dit décimal lorsqu'il peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$où $a$est un entier relatif et où $n$est un entier naturel.

Problèmes posés: Pourquoi $\frac{1}{3}$n'est pas un nombre décimal ? Pourquoi $\frac{1}{8}$ est un nombre décimal ? Soit $k$un entier naturel supérieur ou égal à 2. Quels sont tous les entiers $k$tels que $\frac{1}{k}$ est un nombre décimal ?

1°) A l'aide de la définition, expliquer pourquoi les nombres $2,\ 0,6$ et $\frac{1}{8}$sont des nombres décimaux.

2°) On choisit $k = 8$. On peut établir les équivalences suivantes :

$\frac{1}{8}$ est décimal $\Leftrightarrow$il existe $a$entier relatif et $n$entier naturel tels que $\frac{1}{8} = \frac{a}{10^n}$
$\Leftrightarrow 1 = \frac{a\times 8}{10^n} \Leftrightarrow 1 = \frac{a\times 8}{2^n\times 5^n}$

a- Justifier chaque équivalence ci-dessus
b- Expliquer pourquoi il est possible de choisir des valeurs de $a$et de $n$pour que la fraction $\frac{a\times 8}{2^n\times 5^n}$soit égale à 1.

3°) On choisit $k = 3$. Expliquer pourquoi il n'est pas possible de choisir des valeurs de a et de n pour que la fraction $\frac{a\times 3}{2^n\times 5^n}$soit égale à1. En déduire que $\frac{1}{3}$n'est pas un nombre décimal.

4°) On a établit la feuille de calcul suivante :

D3 =SI(MOD($A3;5)=0;"oui";"")

	A	B	C	D
1	k	1/k	k est multiple de 2	k est multiple de 5
2				
3	2	0,5	oui	
4	3	0,33333333		
5	4	0,25	oui	
6	5	0,2		oui
7	6	0,16666667	oui	
8	7	0,14285714		
9	8	0,125	oui	
10	9	0,11111111		
11	10	0,1	oui	oui
12	11	0,09090909		
13	12	0,08333333	oui	
14	13	0,07692308		
15	14	0,07142857	oui	
16	15	0,06666667		oui
17	16	0,0625	oui	

A l'aide de la feuille de calcul (qui permet d'émettre des conjectures) et de la démonstration effectuée à la question 3°, répondre aux questions suivantes :

a- Est-il suffisant que k soit divisible par 2 et par 5 pour que $\frac{1}{k}$soit un nombre décimal ?
b- Est-il nécessaire que $k$soit divisible par 2 et par 5 pour que $\frac{1}{k}$soit un nombre décimal ?

c- Écrire une condition nécessaire sur k pour que $\frac{1}{k}$ soit un nombre décimal.

d- Écrire une condition nécessaire et suffisante sur k pour que $\frac{1}{k}$ soit un nombre décimal.

5°) a- Vrai ou faux ? On ne demande pas de justifier.

Affirmation 1 : « Si un nombre x peut s'écrire avec un nombre fini de chiffre après la virgule, alors x est un nombre décimal »

Affirmation 2 : « Un nombre décimal est un nombre qui a un nombre fini de chiffres après la virgule »

Affirmation 3 : « Si x est un nombre décimal alors il existe un développement décimal de x fini. »

Affirmation 4 : « Si x est un nombre décimal alors son développement décimal est fini. »

Affirmation 5 : « Si un nombre a une infinité de chiffres après la virgule, alors ce nombre n'est pas décimal. »

b- Soit $x = 0{,}99999\ldots$ et $y = 0{,}333\ldots$
Justifier que $10x = 9 + x$. En déduire la valeur de x. x est-il décimal ?
Montrer que $y = \frac{1}{3}$. y est-il décimal ?

c- L'affirmation 1 est vraie, l'affirmation 2 est fausse, l'affirmation 3 est vraie, l'affirmation 4 est fausse et l'affirmation 5 est fausse. Justifier ces réponses.

Cadre historique (source : wikipédia.fr)

L'usage de nombres fractionnaires est déjà présent dans les fractions sexagésimales de la numération babylonienne et avec les quantièmes égyptiens il y a plus de 3000 ans. Le système décimal est aussi développé dans plusieurs civilisations pour la numération des entiers, mais il n'apparaît que très ponctuellement dans les fractions.

La pratique des nombres décimaux est vraiment mise en place chez des auteurs arabes du X^ème^ siècle, mais ne se diffuse dans les mathématiques européennes que six siècles plus tard. François Viète (1540-1603) promeut l'usage des nombres décimaux pour remplacer les fractions sexagésimales. Simon Stevin publie sa *Disme* en 1585 et parvient à convaincre ses contemporains de l'efficacité des décimaux.

C'est dans le but d'harmoniser l'usage des nombres décimaux avec celui des unités de mesure que les révolutionnaires français de 1789 ont été conduits à introduire le système métrique, qui est un système d'unités décimal.