Casino

Énoncés élèves

1 *KESAKO*

1. On s'intéresse à la ligne 7. Comment, mathématiquement, peut-on faire tester cette action par un ordinateur.
2. Quelle syntaxe python permet de programmer la ligne 5 ? La 4 ?
3. Expliquer ce que fait l'algorithme ci-contre et chercher son utilité. On pourra donner un nom plus transparent à var1 et var2.
4. (Écrire cet algorithme en python)

```
1. Algorithme algorithme mystère
2. compteur ← 0
3. Pour k variant de 1 à 100000
4.   x ← un nombre aléatoire entre -2 et 2
5.   y ← un nombre aléatoire entre 0 et 1
6.   M ← (x, y)
7.   Si M est sous la courbe de e^(-x²/2) Alors
8.       compteur ← compteur+1
9.   Fin Si
9. Fin Pour
10. var1 ← compteur/100000
11. var2 ← 4*var1
```

L'exercice suivant est à donner séparé du premier car contenant des réponses à certaines questions.

2 *Modification*

1. Modifier l'algorithme pour estimer l'aire de f(x) = $e^{-\frac{x^2}{2}}$ sur [-5,5].
2. Peux-t-on l'estimer sur $\mathbb{R}$? On admettra que l'aire est finie.
3. Par quel constante faut-il multiplier $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ pour avoir :

$$k \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = 1$$

3 *Intervalle de confiance*

1. Dans cette question, reprendre l'algorithme de l'exercice KESAKO. Donner un intervalle de confiance au seuil 95% permettant d'estimer

$$\int_{-2}^{2} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

2. Donner un intervalle de confiance au seuil 95% permettant d'estimer

$$\int_{-5}^{5} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

3. Pourquoi ne peux-t-on pas, dans l'état actuel de vos connaissances donner un intervalle de confiance de :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Analyse de l'activité

1. Identifier toutes les difficultés mathématiques que peuvent soulever ces exercices.
2. Quels étayages ou activités préparatoires peut on mettre en place en seconde et en première pour permettre à un élève d'être en situation de réussite sur cette activité ?

Casino

correction exercice 1

```
from random import *
from math import *
compteur = 0
for k in range(1000000):
    x = 4*random()-2
    y = random()
    if y<exp(-x**2/2):
        compteur = compteur + 1
frequence = compteur /1000000
aire = 4*frequence
```

Difficultés mathématiques

Traduire qu'un point est sous une courbe :

Cette difficulté induit un changement de registre : graphique vers calcul. Passer par l'algorithmique l'impose car un algo ne sais faire que des calculs et ne peut «voir».

On s'aperçoit au passage que l'instruction M <- (x,y) ne sert à rien d'être programmée.

création d'un nombre dans -2,2 à partir de random() :

Après avoir essayé sans succès random(-2,2), Une discussion peut s'installer.

Il s'agit la d'une très grosse difficulté pour un élève pour principalement deux raisons.

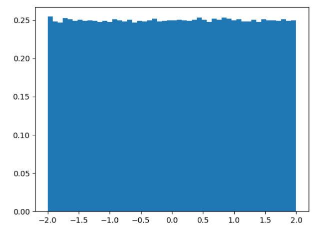
— "4*random() - 2" ou "-4*random() + 2" est difficile à faire émerger. La difficulté étant que pour un élève l'intervalle [0,1] est quatre fois plus petit que [-2,2]. Peut être travailler préalablement la fonction f(x) = 4x pour faire sentier la "bijection".

— La solution suivante

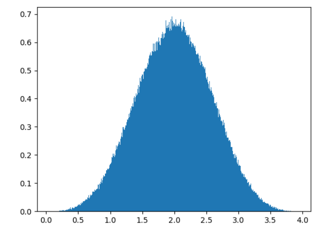
$$random() + random() + random() + random()$$

sort quelque fois (mais relativement rarement). Elle remporte en général les suffrages de la classe et semble plus naturel aux élèves : pour créer un nombre entre 0 et 4, on en crée 4 entre 0 et 1.

On a également un nombre aléatoire entre 0 et 4 mais il n'est juste pas uniforme :



histogramme d'un échantillon de 4*random()-2



histogramme d'un échantillon de random() + random() + random() + random()

Travailler avec random() fait intervenir les lois à densité. Restons modestes avec nos élèves. Après tout, c'est du programme de terminale non. En plus un ordinateur avec random() génére en fait une loi discrète et non continue mais que l'on considère quand même comme continue !!!

La modélisation statistique n'est clairement pas le bon angle d'attaque pour l'algorithmique

Au fait à quoi sert cet algorithme ? LGN Cette question coeur de séance, une fois la difficulté de la simulation de l'aléatoire entre 0 et 4 mérite qu'on s'y attarde.

var 1 est la fréquence des points sous la courbe (facile à comprendre pour un élève). Mais pourquoi la multiplier par 4 ?

Une discussion peut alors s'enclencher. Il s'agit de faire le lien entre statistiques (on a un échantillon de 100 000 flèchettes lancées dans une cible) et l'expérience aléatoire de lancer d'une fléchette dans une cible (on a d'ailleurs ici l'obligation de faire des exercices d'anticipation en probabilité de fléchettes dans des cibles pour aborder la proba comme proportion de l'aire.

C'est important de faire le lien entre l'expérience aléatoire et l'échantillon : c'est un exercice d'estimation qui se fonde sur la loi des grands nombres.

var2 (aire) est une valeur approchée de l'aire sous la courbe.

compteur = compteur + 1 Il est toujours intéressant de souligner cette difficulté de compréhension pour nombre de nos élèves. Ne pas hésiter à revenir au sens de cette instruction en programmation : affectation.

Intervalle de confiance : TCL

Cet exercice, on vient de le voir est extrêmement riche mathématiquement. Il est possible de le prolonger via l'exercice 3 avec l'utilisation d'un intervalle de confiance et ainsi avoir une utilisation de cette branche des mathématiques un peu moins stéréotypé que ce que l'on rencontre souvent.

Casino

L'autre intérêt est de montrer que les conditions que l'on a en classe de seconde (f autour de 0,5) est fondamental. Car dès que l'on agrandit l'intervalle, la probabilité d'être sous la courbe se rapproche de 0. Et très rapidement l'intervalle de confiance trouvé n'a aucun sens.

Cela permet d'illustrer le théorème central limite (cas binomiale avec Moivre Laplace).

Les fonctions informatiques sont des fonctions mathématiques ?

Les fonctions informatiques étant des fonctions mathématiques (il est fondamental de le rappeler régulièrement). Cet exercice interroge. Lorsque l'on implémente cet algorithme par une fonction on obtient la def suivante :

```python
def montecarlo(n):
    compteur = 0
    for k in range(n):
        x = 4*random()-2
        y = random()
        if y<exp(-x**2/2):
            compteur = compteur + 1
    frequence = compteur /n
    aire = 4*frequence
    return frequence
```

La première réaction serait de se dire l'affirmation ci-dessus est fausse : à chaque fois que je lance ma fonction mon résultat est différent. Normalement l'image par une fonction mathématiques est unique : pour un n donné f(n) ne devrait pas varier.

C'est juste que la fonction mathématiquement réalisant cette fonction est une variable aléatoire (cf théorie de la mesure). Ainsi à chaque fois que nous lançons f(n) nous obtenons une réalisation de cette VA : f(n)(ω)