1 Méthode de résolution d'équation Al-Khwarizmi

Muhammad Ibn Mũã al-Khuwãrizmĩ, généralement appelé Al-Khwarizmi (latinisé en Algoritmi ou Algorizmi), né dans les années 780, originaire de Khiva dans la région du Khwarezm qui lui a donné son nom, dans l'actuel Ouzbékistann, mort vers 850 à Bagdad, est un mathématicien, géographe, astrologue et astronome perse, membre de la Maison de la sagesse de Bagdad. Ses écrits, rédigés en langue arabe, puis traduits en latin à partir du XIIe siècle, ont permis l'introduction de l'algèbre en Europe.

Source : wikipedia.fr

Al-Khwarizmi s'est intéressé à la résolution systématique des équations du second degré, les nombres négatifs n'ayant pas de sens à son époque, il ne cherchait que les solutions positives de ces équations. Voici l'exposé d'un de ses procédés.
Les traductions sont de Ahmed Djebbar dans *L'Algèbre arabe, genèse d'un art.*

Résolution de $x^2 + 10x = 39$

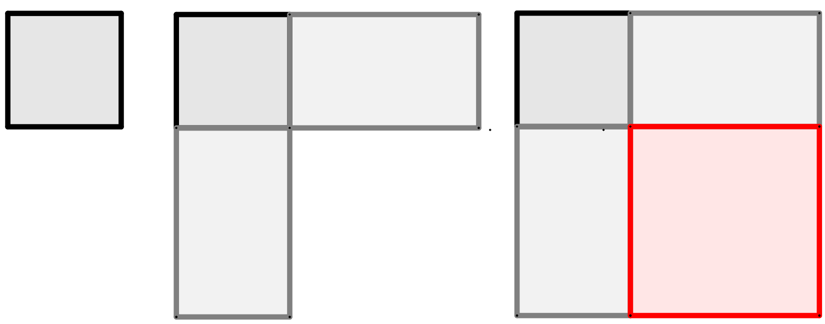
> Quant aux biens et aux racines qui égalent le nombre, c'est comme lorsque tu dis : un bien et dix de ses racines égale trente-neuf dirhams. (le terme arabe utilisé est mäl ce terme signifie bien, somme d'argent, fortune)
>
> Sa signification est que tout bien, si tu lui ajoutes l'équivalent de dix de ses racines cela atteindra trente-neuf.
>
> Son procédé consiste à diviser les racines par deux, et c'est cinq dans ce problème.
>
> Tu le multiplies par lui-même et ce sera vingt-cinq. Tu l'ajoutes à trente-neuf. Cela donnera soixante-quatre.
>
> Tu prends alors sa racine carrée qui est huit et tu en retranches la moitié des racines, et c'est cinq.
>
> Il reste trois, et c'est la racine du bien que tu cherches ; et le bien est neuf.

1. À quoi correspondent les termes bien et racines dans l'équation initiale ?
2. Vérifier les calculs effectués. Quelle solution de l'équation est trouvée par ce procédé ?

Preuve

Al-Khwarizmi propose deux démonstrations de sa méthode s'appuyant sur la géométrie, nous nous intéressons ici à la deuxième :

> Il y a une autre figure qui mène également à cela et c'est : la surface (AB), étant le mäl, nous voulons lui ajouter l'équivalent de dix de ses racines. Nous divisons par deux les dix, elles deviennent cinq, nous les transformons en deux surfaces sur les flancs de la surface (AB), et ce sont les deux surfaces (J), (N).
>
> La longueur de chacune des deux surfaces est cinq coudées -et c'est la moitié des dix racines- et sa largeur est comme le côté de la surface (AB).
>
> Il nous reste alors un carré dans l'angle de la surface (AB), et c'est cinq par cinq, et c'est la moitié des dix racines que nous avons ajoutées sur les flancs de la première surface.
>
> Or nous savons que la première surface est le bien et que les deux surfaces qui sont sur ses deux flancs sont dix racines. Tout cela est donc trente neuf, et il reste pour compléter la surface la plus grande, un carré de cinq par cinq, et c'est vingt-cinq. Nous l'ajoutons à trente neuf afin que se complète la surface la plus grande, et c'est la surface (DE).Tout cela vaudra soixante-quatre.
>
> Nous prenons sa racine, et c'est huit, et c'est l'un des côtés de la surface la plus grande. Si nous lui retranchons l'équivalent de ce que nous lui avons ajouté -et c'est cinq- il reste trois, et c'est le côté de la surface (AB) qui est le bien, et c'est sa racine ; et le bien est neuf, et voici sa figure :



1. Repérer les différentes surfaces et longueurs citées dans le texte sur les figures présentées.
2. Faire le lien avec l'écriture moderne de l'équation : $x^2 + 10x = 39$.
3. Donner une écriture algébrique de la preuve. L'équation a-t-elle une solution unique ?
4. Résoudre $x^2 + 6x = 40$.

2 Paradoxe du duc de Toscane

En 1610 Galilée quitte Venise pour Florence où il devient Premier Mathématicien et Premier Philosophe du grand-duc de Toscane. Le duc, grand amateur de jeu, lui soumet le paradoxe suivant concernant un jeu de dés. Il s'agit de lancer trois dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et de faire la somme des trois faces. Or le duc a constaté que la somme 10 apparaissait plus fréquemment que la somme 9, alors même qu'il y avait 6 façons d'obtenir 9 et 6 façons d'obtenir 10 avec la somme de 3 entiers de 1 à 6.
Voici le problème exposé par Galilée :

> Que dans le jeu de dés certains points soient plus avantageux que d'autres, on en a une explication très évidente, qui consiste dans le fait que ceux-là peuvent sortir plus facilement que ceux-ci, ce qui dépend de leur capacité à se former avec plusieurs sortes de chiffres : c'est pourquoi le 3 et le 18, qui sont des points que l'on ne peut obtenir que d'une seule manière avec trois chiffres (c'est-à-dire l'un avec 6-6-6 et l'autre avec 1-1-1, et pas autrement) sont plus difficiles à faire apparaître que par exemple le 6 ou le 7 qui se composent de plusieurs manières (c'est-à-dire le 6, avec 1-2-3 et 2-2-2 et 1-1-4, et le 7 avec 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3, 2- 2-3).
>
> Cependant, bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façons que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même fréquence, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12.
>
> Et que le 9 et le 10 se forment (et ce que l'on dit de ceux-ci s'entend pour leurs symétriques le 12 et le 11) se forment, dis-je, avec la même diversité de chiffres, est évident : en effet le 9 se compose en 1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3, qui sont six triplets, et le 10 en 1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4, et non d'autres façons ce qui fait aussi six combinaisons.

1. Lecture, analyse et compréhension du problème.

2. Simuler le jeu et vérifier la conjecture émise dans l'énoncé.

3. Démontrer cette conjecture.

3 Première lettre de Pascal à Fermat (non datée)

Un certain chevalier de Méré, homme d'esprit réputé, ne veut absolument pas reconnaître l'autorité des mathématiciens dans un problème concernant le jeu de dés ; il s'est mis dans la tête une autre solution et, étant persuadé de sa justesse, il accuse ouvertement les mathématiques de se contredire.
Pascal en fait le récit à Fermat de manière vivante, comme suit :

> Monsieur,
>
> Je n'ai pas eu le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnait fort M. de Méré, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et je n'ai jamais pu l'en tirer. Si vous pouviez le faire, on le rendrait parfait.
>
> Il me disait donc qu'il avait trouvé faussseté dans les nombres par cette raison : Si on entreprend de faire un six avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4 , comme de 671 à 625.
>
> Si on entreprend de faire sonnez avec deux dés (obtenir deux six), il y a désavantage de l'entreprendre en 24. Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé). Voilà quel était son grand scandale qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes et que l'arithmétique se démentait : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

1. Lecture, analyse et compréhension du problème.

2. Simuler les jeux et vérifier la conjecture émise dans l'énoncé.

3. Démontrer cette conjecture.

4 Lettre de Pascal à Fermat 1654

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard, au début de la partie, les deux joueurs misent 32 pistoles chacun : la règle est simple, celui qui remportera trois parties remportera les 64 pistoles.
La question posée par le Chevalier est la suivante : "Pour une raison inconnue les deux joueurs s'arrêtent avant la fin de la partie, comment peut-on répartir l'argent de façon équitable" ?
L'échange épistolaire sur cette question entre Pascal et Fermat est considéré comme l'acte de naissance des probabilités.

> Monsieur,
>
> L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de CARCAVI, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.
>
> J'admire bien davantage la méthode des partis que celle des dés : j'avais vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de MÉRÉ, qui est celui qui m'a proposé ces questions et aussi M. de ROBERVAL : mais M. de MÉRÉ n'avait jamais pu trouver la juste valeur des partis ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvais seul qui eusse connu cette proportion.
>
> Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche ; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrais pouvoir vous dire ici en peu de mots : car je voudrais désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvait, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.
>
> Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu.
>
> Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles ; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.
>
> Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 : s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
>
> Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
>
> Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard qu e vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.
>
> Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez en 12, et moi 12, qui, avec 32, font 44".

Détailler la méthode de Pascal avec nos notations actuelles.

5 Méthode de Héron

En mathématiques, la méthode de Héron ou méthode babylonienne est une méthode efficace d'extraction de racine carrée, c'est-à-dire de résolution de l'équation $x^2 = a$, avec a positif. Elle porte le nom du mathématicien Héron d'Alexandrie, qui l'expose dans le tome I de son ouvrage Metrica (Les métriques), découvert seulement en 1896 mais certains calculs antérieurs, notamment égyptiens, semblent prouver que la méthode est plus ancienne.

Il détaille initialement une méthode pour calculer l'aire d'un triangle en connaissant ses trois côtés (formule de Héron), en prenant pour exemple un triangle de côtés 7, 8 et 9 unités. Il obtient alors le nombre 720 comme résultat intermédiaire, dont il doit calculer la racine carrée pour aboutir au résultat final. Il propose alors la méthode de calcul suivante :

> Puisque alors les 720 n'ont pas le côté exprimable, nous prendrons le côté avec une très petite différence ainsi. Puisque le carré le plus voisin de 720 est 729 et il a 27 comme côté, divise les 720 par le 27 : il en résulte 26 et deux tiers. Ajoute les 27 : il en résulte 53 et deux tiers. De ceux-ci la moitié : il en résulte 26 2' 3'. Le côté approché de 720 sera donc 26 2' 3'. En effet 26 2' 3' par eux-mêmes : il en résulte 720 36', de sorte que la différence est une e part d'unité. Et si nous voulons que la différence se produise par une part plus petite que le 36', au lieu de 729, nous placerons les 720 et 36' maintenant trouvés et, en faisant les mêmes choses, nous trouverons la différence qui en résulte inférieure, de beaucoup, au 36'.

1. À partir du texte

- **a.** Reprendre et vérifier les calculs.
- **b.** Reprendre la méthode pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{10}$ en partant de 4.
- **c.** Décrire l'algorithme de calcul de cette méthode.

2. Point de vue géométrique

La méthode proposée par Héron se base sur une construction géométrique. Il cherche à déterminer la longueur du côté du carré dont l'aire est a, en l'approchant par une suite de rectangles qui ont pour aire a.

- $*$ Choisir la longueur du premier côté (initialisation) ou prendre le résultat de $***$.
- $**$ Déterminer de la longueur du deuxième côté.
- $***$ Calculer la moyenne de ces deux valeurs.

  Reprendre au $*$ jusqu'à la précision souhaitée.

Construire les trois premiers rectangles correspondant au calcul de la valeur approchée de $\sqrt{10}$ avec 4 pour valeur initiale.

3. Représentation par une suite

- **a.** Déterminer une suite dont les termes donnent les valeurs successives de la méthode de Héron pour un nombre a positif.
- **b.** Tester la convergence de la suite sur des exemples.
- **c.** Calcul de seuils.
- **d.** Que se passe-t-il si le premier terme est négatif ? Si a est négatif ?.
- **e.** Justifier que pour tout $a > 0$ la limite, si elle existe, est solution de l'équation : $x^2 = a$.

4. Algorithmique

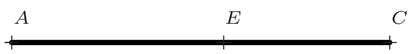
Comparer les vitesses de convergence de la méthode de Héron et de la méthode par balayage vue en 2^{de}.

6 Méthode pour la recherche du maximum et du minimum de Fermat

En 1620, Fermat propose une méthode originale pour trouver le maximum d'une aire d'un rectangle connaissant son périmètre.
En 1636, Fermat livre une méthode générale de détermination des tangentes, utilisant à cette fin la méthode d'adégalisation (mot emprunté à Diophante).

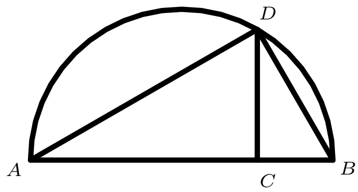
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :
Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques.
On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques.
On adégalera, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances.
On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement.
On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins.
La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :
Soit à partager la droite AC en E, en sorte que $AE \times EC$ soit maximum.



Posons $AC = b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba - a^2$.
Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$;
Il doit être adégalé au précédent : $ba - a^2$;
Supprimant les termes communs : $be \sim 2ae + e^2$;
Divisant tous les termes : $b \sim 2a + e$;
Supprimez e : $b \sim 2a$.
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.
il est impossible de donner une méthode plus générale.

Dans le cours des questions, il se présente souvent des radicaux ; l'analyste ne doit pas alors hésiter à employer une troisième inconnue, ou, s'il le faut, à en poser un plus grand nombre encore ; on pourra en effet de la sorte éviter les élévations aux puissances qui, en se répétant, compliquent d'ordinaire les calculs. L'artifice de cette méthode va être expliqué sur [l'exemple qui suit] :
Soit un demi-cercle de diamètre AB, avec la perpendiculaire DC au diamètre. On demande le maximum de la somme $AC + CD$.



Soit b le diamètre, posons $AC = a$;

1. Montrer qu'on souhaite rendre maximale la quantité

$$a + \sqrt{ba - a^2}.$$

En appliquant les règles de la méthode [du maximum et du minimum], on arriverait à adégaler des expressions dont le degré serait trop élevé ; désignons donc par u la quantité maximale ; car pourquoi abandonnerions-nous l'usage (...) de représenter par des voyelles les quantités inconnues ?

Nous aurons donc $a + \sqrt{ba - a^2} = u$;

2. Montrer que $u^2 + a^2 - 2ua = ba - a^2$.

Cela fait, il faut effectuer une transposition de façon qu'un membre de l'équation soit formé par le seul terme où u figure à la plus haute puissance ; on pourra dès lors déterminer le maximum, ce qui est le but de l'artifice. Cette transposition nous donne $ba - 2a^2 + 2ua = u^2$. Mais par hypothèse u est la quantité maximale ; donc u^2, carré d'une quantité maximale, sera lui-même un maximum ; par conséquent, $ba - 2a^2 + 2ua$ (expression égale à u^2) sera un maximum. [Dans cette expression] ne figure d'ailleurs aucun radical ; traitons-la avec la méthode [du maximum et du minimum], comme si u était une quantité connue.

3. En utilisant la méthode décrite précédemment, terminer le problème.