Olympiades académiques de mathématiques

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Mercredi 16 mars 2016

Toutes séries

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Ce sujet comporte deux exercices, tous à traiter dans le temps imparti.

La durée de composition est de 2 heures.

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins d'une heure après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout d'une heure ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Les candidats indiqueront, dans l'en-tête de leur copie, leur filière et l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

Exercice numéro 1

(proposé par le jury académique)

Au feu rouge

En moyenne, nous passons 6 mois de notre vie assis devant un feu rouge ! Certains designers ont imaginé des feux tricolores qui comprennent un chronomètre afin d'informer les automobilistes du temps d'attente restant avant le feu vert. Cette invention ne change pas le temps perdu au feu mais permet d'anticiper le passage du feu vert au feu rouge.

On considère un feu de signalisation qui clignote pendant 2 minutes (les voitures passent) puis passe au rouge pendant 1,5 minutes (les voitures s'arrêtent et sont en attente).

1. Une voiture arrive à un instant t.

- **a)** Expliquer pourquoi t peut être assimilé au tirage d'un réel aléatoire de l'intervalle [0 ; 3,5].
- **b)** Quelle est la probabilité que la voiture arrive au feu alors qu'il est rouge ?
- **c)** Quelle est la probabilité que le temps d'attente au feu soit nul ?
- **d)** Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit supérieur à 1 minute.
- **e)** Déterminer la probabilité que le temps d'attente au feu soit inférieur à x minutes où x est un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 1,5]
- **f)** Un automobiliste patiente depuis 50 secondes au feu rouge. Quelle est la probabilité que son temps d'attente total soit inférieur à une minute ?

2. L'algorithme ci-dessous permet de simuler l'arrivée d'une voiture au feu et d'afficher le temps d'attente.

<u>**Variables :**</u> t et a sont des nombres réels

<u>**Traitement :**</u> t prend une valeur aléatoire entre 0 et 3,5

Si $t \leq 2$ alors

a prend la valeur 0

Afficher « le temps d'attente est nul »

Sinon

a prend la valeur $3{,}5 - t$

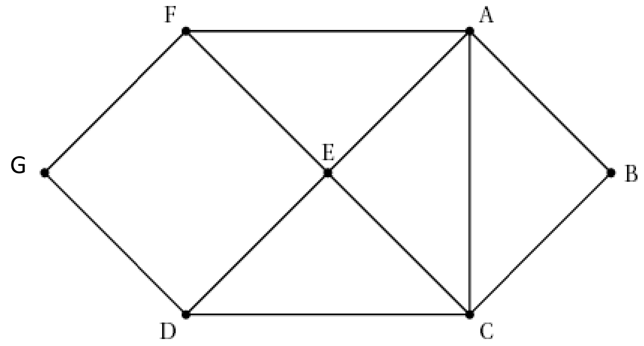
<u>**Sortie :**</u> Afficher « Le temps d'attente est de »

Afficher a

Afficher « minutes. »

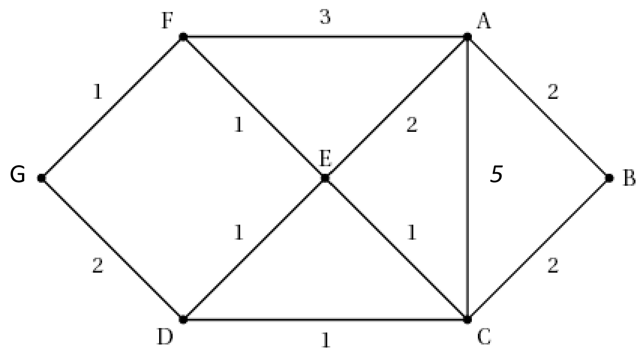
Modifier l'algorithme pour qu'il donne le temps d'attente moyen au feu, que l'on pourra estimer à partir de 1000 véhicules.

3. Le schéma ci-dessous représente le plan d'une ville. Les segments matérialisent les principales avenues et les feux à l'intersection de ces avenues sont désignés par les points A, B, C, D, E, F et G.



a) Un piéton souhaite se promener dans la ville en parcourant toutes les avenues une et une seule fois.
Est-ce possible ? Si oui, donner un trajet possible en mentionnant la liste des feux rencontrés, dans l'ordre.

b) Un automobiliste est au feu F. Déterminer le nombre de chemins lui permettant d'aller de F à D sans emprunter deux fois le même feu.
On a indiqué sur le schéma ci-dessous la longueur des avenues en kilomètres.

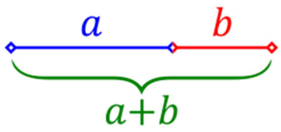


Parmi les chemins de la question précédente, quel est le plus long ?

Exercice numéro 2
(proposé par le jury académique)

Le nombre d'or

Présentation :



Le nombre d'or est une proportion, définie initialement en géométrie comme l'unique rapport entre deux longueurs *a* et *b* telles que le quotient de la somme des deux longueurs *a* + *b* par la plus grande *a* soit égal à celui de la plus grande *a* par la plus petite *b,* c'est-à-dire **l'unique rapport entre deux longueurs a et b tel que**

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}.$$

Le découpage d'un segment en deux longueurs vérifiant cette propriété est appelée par Euclide découpage en « extrême et moyenne raison ». Le nombre d'or $\frac{a}{b}$ est maintenant souvent désigné par la lettre Φ (phi) en l'honneur du sculpteur Phidias qui l'aurait utilisé pour concevoir le Parthénon.

Partie A - Généralités sur le nombre d'or

Soient *a* et *b* deux nombres tels que : $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

1. On pose $\Phi = \frac{a}{b}$.

a) Montrer que Φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

b) Justifier que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Donner une valeur approchée de Φ à 10^{-5} près.

2. a) Montrer que $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$.

b) En déduire que

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} \quad \text{et} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\Phi}}}$$

3. On considère la suite de fractions suivantes :

$$F_0 = 1\ ;\ F_1 = 1 + \frac{1}{1}\ ;\ F_2 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}\ ;\ F_3 = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}\ ;\ \ldots$$

a) Ecrire les fractions F_4 et F_5 et les simplifier.

b) Soit n un entier naturel. Ecrire un algorithme permettant de calculer F_n.

c) A l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-9} de F_{20}.

d) Que peut-on conjecturer sur les nombres F_n lorsque n devient grand ?

Partie B - Nombre de pavages par des dominos et nombre d'or

On considère un quadrillage $n \times 2$ dont la longueur comporte n carreaux et la hauteur 2 carreaux. On s'intéresse au nombre K(n) de manières différentes de paver complétement ce quadrillage par des dominos constitués de deux carreaux ayant un côté commun.
Les dominos recouvrent deux cases du quadrillage ayant un côté commun.

Grille $n \times 2$ à paver par des dominos

Exemple de pavage par les dominos

On pose K(0) = 1 car il existe une seule manière de ne mettre aucun domino dans un quadrillage 0×2.

1. **a)** Justifier que K(1) = 1 et K(2) = 2.

b) Déterminer K(3).

c) Justifier que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, K(n + 1) = K(n) + K(n - 1).

2. **a)** Soit r un nombre réel non nul.
Montrer que le nombre r vérifie la relation $r^{n+1} = r^n + r^{n-1}$ pour tout entier naturel n si, et seulement si $r = \Phi$ ou $r = 1 - \Phi$.

b) Soient α et β deux nombres réels.
Montrer que les nombres de la forme $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ vérifient, pour tout entier naturel n non nul, l'égalité $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que les nombres de la forme $u_n = \alpha\Phi^n + \beta(1-\Phi)^n$ sont les seuls vérifiant, pour tout entier naturel n non nul, la relation $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

c) Déterminer α et β tels que $u_0 = u_1 = 1$.

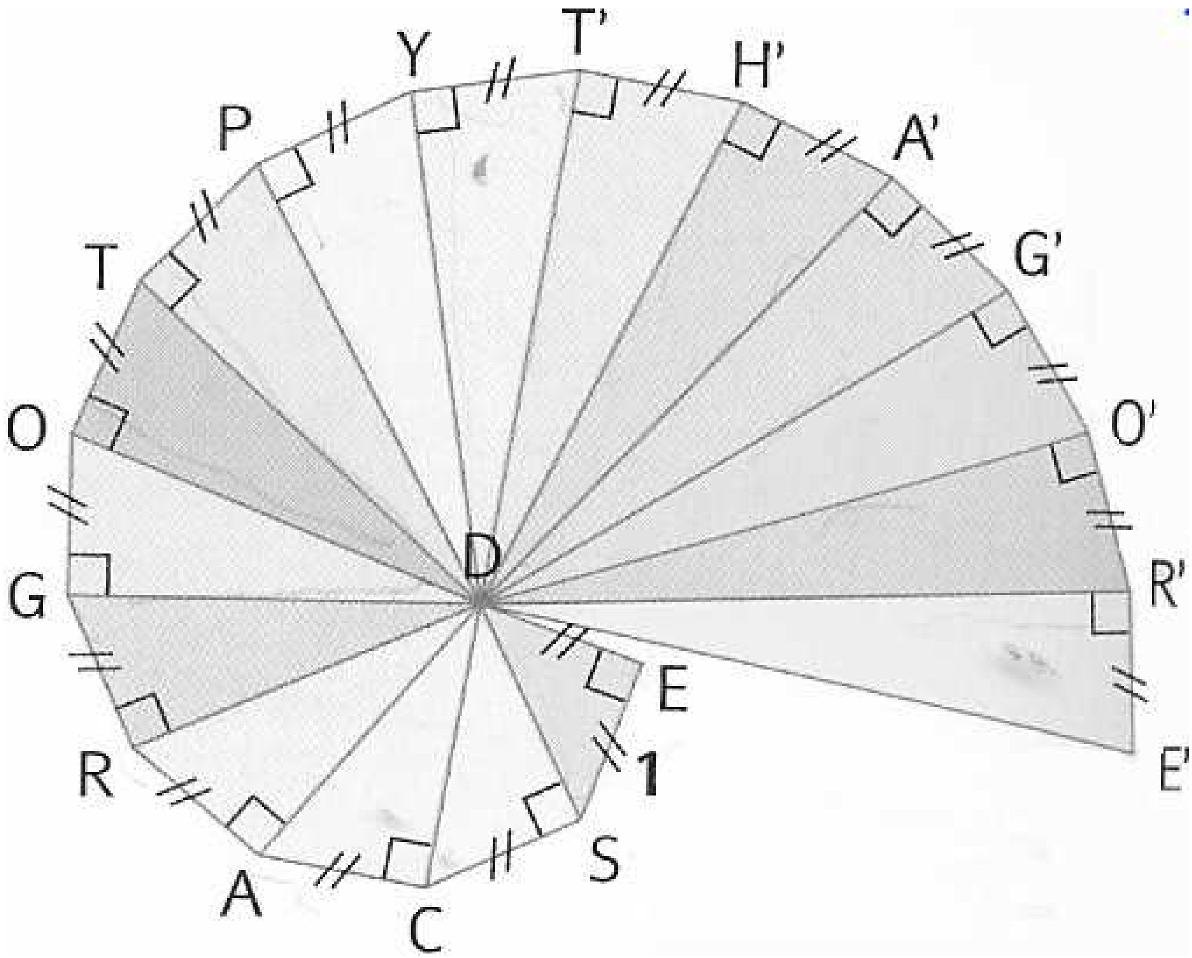
d) En déduire une expression de K(2016). (On pourra donner une expression de K(2016) en fonction de Φ.)

Partie C - Construction géométrique du nombre d'or

Un segment de longueur *a* est dessiné en **annexe (*à rendre avec la copie*)**.

On souhaite tracer un segment de longueur *b* tel que $\frac{a}{b} = \Phi$.

On dispose pour cela d'une équerre et d'une règle **non graduées**, d'un compas, et de l'escargot de Pythagore ci-dessous.
Construire, sur l'**annexe**, un segment de longueur *b* en expliquant clairement la démarche.



Nom – Prénom – Classe – Etablissement

Annexe
(à rendre avec la copie)