Olympiades académiques de mathématiques

Académie de Besançon

Mercredi 18 mars de 8 heures à 12 heures

Série S

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

L'épreuve comporte quatre exercices, tous à traiter dans le temps imparti. Il est conseillé de ne pas en privilégier trop fortement un sur les autres.

La durée de composition est de 4 heures.

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins de trois heures après le début. Un candidat qui quitterait la salle au bout de trois heures ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Les candidats indiqueront, dans l'en-tête de leur copie, leur filière et l'établissement dans lequel ils sont inscrits.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

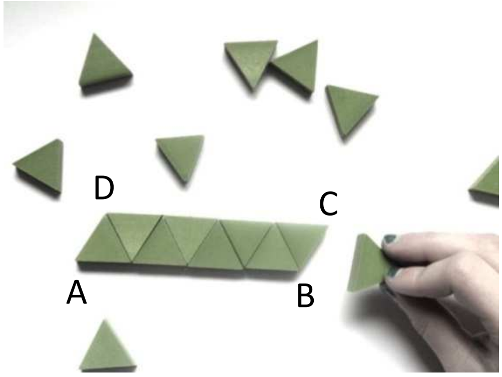
Exercice numéro 1

(proposé par le jury national)

Défi entre sœurs

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre.
Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la **valeur exacte** des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :

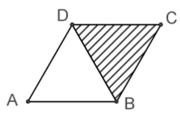
- ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
- L = AC la longueur de la diagonale [AC] ;
- l = BD la longueur de la diagonale [BD].



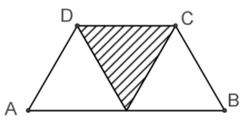
Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.

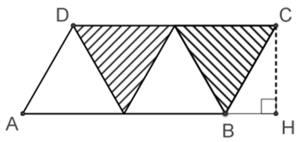
2. Calculer les longueurs l et L pour les cas suivants :



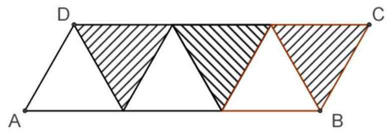
Deux triangles



Trois triangles



Quatre triangles



Six triangles

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre ses calculs de diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier supérieur ou égal à 2) et se met à chercher :

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair,** montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$, où $p = \frac{n}{2}$.

2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs l et L ?

3. Clémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs l et L calculées par Léa.

Partie C

Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :

1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »

2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre premier »

On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?

3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\,015}$?

4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\,015\,057}$.
Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.

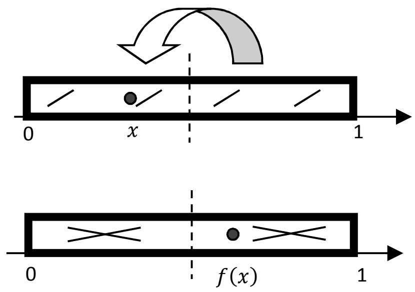
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Exercice numéro 2

(proposé par le jury national)

On est les rois !



Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.

Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\,,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leq \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément de [0 ; 1] appartient à [0 ; 1].
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève.

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\,;1]$ sont notées $x_1 = f(x)$, $x_2 = f(x_1)$, $x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? L'abscisse 0, 33 ? Commenter.

2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre à la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il la cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\,;1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme.

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme ci-contre afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).

> **Variables**
> $\quad x$ est un élément de $[0\,;1]$
> **Début**
> $\quad$ **Saisir** le nombre x compris entre 0 et 1
> $\quad$ **Tant que** $x \neq 0$ **faire**
> $\qquad$ **Si** $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
> $\qquad\quad x$ **prend la valeur** $2\,x$
> $\qquad$ **Sinon**
> $\qquad\quad x$ **prend la valeur** $2(1-x)$
> $\quad$ **Fin tant que**
> **Fin**

2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2.**, le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible.
Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Exercice numéro 3
(proposé par le jury académique)

L'ascenseur

Suite à un problème technique, un seul ascenseur est encore en service dans un immeuble de 50 étages.

Cet ascenseur fonctionne ainsi :

- Il descend ou monte un étage en 3 secondes.
- Chaque arrêt à un étage dure 15 secondes.
- Pour des raisons de sécurité, au maximum 10 personnes peuvent se trouver simultanément dans l'ascenseur.
- Lorsque l'ascenseur est vide et que des personnes l'appellent simultanément, l'étage auquel il s'arrête en premier est choisi de manière aléatoire. Ensuite chaque personne qui monte dans l'ascenseur sélectionne l'étage où elle souhaite se rendre, qui est un nombre entier compris entre 0 (Rez-de-chaussée : RDC) et 50. L'ascenseur satisfait toujours le premier ordre qui lui est donné.
- Lorsque l'ascenseur, en charge, se rend d'un étage à un autre, si des personnes qui se trouvent entre ces deux étages souhaitent descendre ou monter dans l'ascenseur, celui-ci s'arrête et reprend l'itinéraire programmé.

Par exemple, si deux personnes qui se trouvent respectivement aux étages 10 et 13 appellent l'ascenseur qui est vide à l'étage 50 pour se rendre au RDC, les itinéraires possibles sont :

- 50 – 13 – 10 – 0
- 50 – 10 – 0 – 13 – 0

1. Une personne monte dans l'ascenseur, initialement vide, à l'étage 15 pour se rendre au RDC. Quand l'ascenseur redémarre, une personne située à l'étage 10 et une autre à l'étage 28 appellent l'ascenseur pour se rendre elles aussi au RDC.
Justifier que le temps écoulé entre le redémarrage de l'ascenseur à l'étage 15 et le moment où les trois personnes sont parvenues au rez-de-chaussée est de 4 min 18 sec.

2. L'ascenseur est au RDC et vide. Trois personnes situées respectivement aux étages 8, 23 et 38 souhaitent descendre au rez-de-chaussée.

a) Les trois personnes appellent simultanément l'ascenseur. Donner tous les itinéraires possibles pour l'ascenseur ainsi que la durée de chacun d'eux (en minutes et secondes).

b) La personne de l'étage 38 décide d'emprunter les escaliers. Deux étages successifs sont séparés par 20 marches.
Si cette personne est très sportive, elle peut espérer descendre 15 marches toutes les 5 secondes et franchir chaque palier en 2 secondes. Sinon, elle descend 2 marches par seconde et franchit chaque palier en 5 secondes.
Dans chacun des cas (personne à l'étage 38 très sportive ou non), calculer la probabilité que cette personne mette moins de temps à descendre à pied qu'en ascenseur.

3. A chacun des étages 30, 35, 40, 45,et 50 trois personnes attendent l'ascenseur pour descendre 20 étages, c'est-à-dire pour se rendre respectivement aux étages 10, 15, 20, 25, 30. L'ascenseur, vide au départ, embarque d'abord les personnes de l'étage 50.
Quelle durée minimum faut-il aux personnes qui attendent à l'étage 35 pour atteindre l'étage 15 ?
Préciser alors l'itinéraire de l'ascenseur.

4. Soit n un entier compris entre 1 et 50.
Trois personnes attendent l'ascenseur : une à l'étage n, une à l'étage 15 et une à l'étage 10. Toutes veulent descendre au rez-de-chaussée.

a) L'ascenseur se trouve initialement au rez-de-chaussée et vide. Déterminer selon les valeurs de n la probabilité que la personne de l'étage n arrive strictement avant la personne de l'étage 15 au rez-de-chaussée.

b) Les résultats changent-ils si l'ascenseur se trouve initialement à l'étage 30 ? Justifier.

c) On souhaite écrire un algorithme simulant la descente de ces trois personnes dans le cas où l'ascenseur se trouve initialement vide au rez-de-chaussée et avec $10 < n < 15$.

- Quel est le rôle du bloc écrit en gras dans l'algorithme ci-dessous ?
- Compléter l'algorithme en écrivant les blocs 1, 2 et 3 sur votre copie (ces blocs peuvent contenir plusieurs instructions) afin que l'algorithme remplisse son rôle.

```
Variables : n entier naturel
            r nombre réel
            A entier naturel
Traitement :
Saisir n
Simuler un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1] et stocker le résultat dans r
Si r < 1/3 alors
   A prend la valeur 10
Sinon Si r < 2/3 alors
   A prend la valeur n
      Sinon
         A prend la valeur 15
      Fin Si
Fin Si
Afficher A
Si A = 15 alors
   A prend la valeur n
   Afficher A
   [Bloc 1]
Fin Si
Si A = n alors
   [Bloc 2]
Fin Si
Si A = 10 alors
   A prend la valeur 0
   Afficher A
   Simuler un nombre aléatoire dans l'intervalle [0 ; 1] et stocker le résultat dans r
   [Bloc 3]
Fin Si
```

d) On suppose que $n = 12$.
Les trois personnes ayant beaucoup de temps libre, elles répètent 150 fois leur descente en ascenseur au rez-de-chaussée, l'ascenseur étant toujours initialement au rez-de-chaussée et vide.
Lors de 65 descentes, la personne de l'étage 12 est arrivée strictement avant la personne de l'étage 15 au rez-de-chaussée.
Peut-on considérer que l'ascenseur choisit réellement au hasard l'étage auquel il se rend en premier ?

Exercice numéro 4

(proposé par le jury académique)

Homothéties

L'unité est le centimètre. Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul.
On appelle **homothétie de centre O et de rapport k** la transformation qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Partie A

1. Que peut-on dire d'une homothétie de rapport 1 ?

2. Soient O et M deux points distincts du plan.

a) Construire le point M' image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport *-1*.
A quelle transformation usuelle correspond cette homothétie ?

b) Construire le point N image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport *2*.

c) Construire le point P image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

3. Soit *ABCD* un trapèze de bases *[AB]* et *[CD]* tel que *AB = 2* et *CD = 5*.
On admet qu'il existe une unique homothétie qui transforme *A* en *D* et *B* en *C*. Déterminer le centre O et le rapport k de cette homothétie.

4. Un point fixe par une homothétie est un point *qui est confondu avec son image par cette homothétie.*
Discuter, selon les valeurs de k, l'existence et le nombre de points fixes par une homothétie.

Partie B – Quelques propriétés

Soient M et N deux points distincts du plan. On note M' et N' leurs images respectives par une homothétie de centre O et de rapport k.

1. Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$.

2. En déduire l'expression de la longueur $M'N'$ en fonction de la longueur MN et de k.

3. Montrer qu'une homothétie conserve l'alignement (c'est-à-dire que les images de trois points alignés sont trois points alignés).

4. Démontrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la droite de départ.

5. Soit O' un point du plan distinct de O et k' un réel non nul. On note h (respectivement h'), l'homothétie de centre O (respectivement O') et de rapport k (respectivement k'). On suppose que $k \neq 1$ et $k' \neq 1$.
On note $h' \circ h$ l'application qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point $h'\big(h(M)\big)$.

a) Quelle est la nature de l'application $h' \circ h$ si $kk' = 1$?

b) Dans cette question, on suppose que $kk' \neq 1$.
Montrer que l'application $h' \circ h$ possède un unique point fixe O'' qui se trouve sur la droite (OO').
En déduire que $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk'.

Partie C – Un théorème de Pappus

Démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soient *d* et *d'* deux droites distinctes du plan et soient *A, B, C* trois points de *d* et *A', B', C'* de *d'*.
Si *(AB') //(A'B)* et si *(BC')// (B'C)* alors *(AC') //(A'C)*.

On pourra étudier le cas où *d* et *d'* sont parallèles, puis le cas où elles sont sécantes.