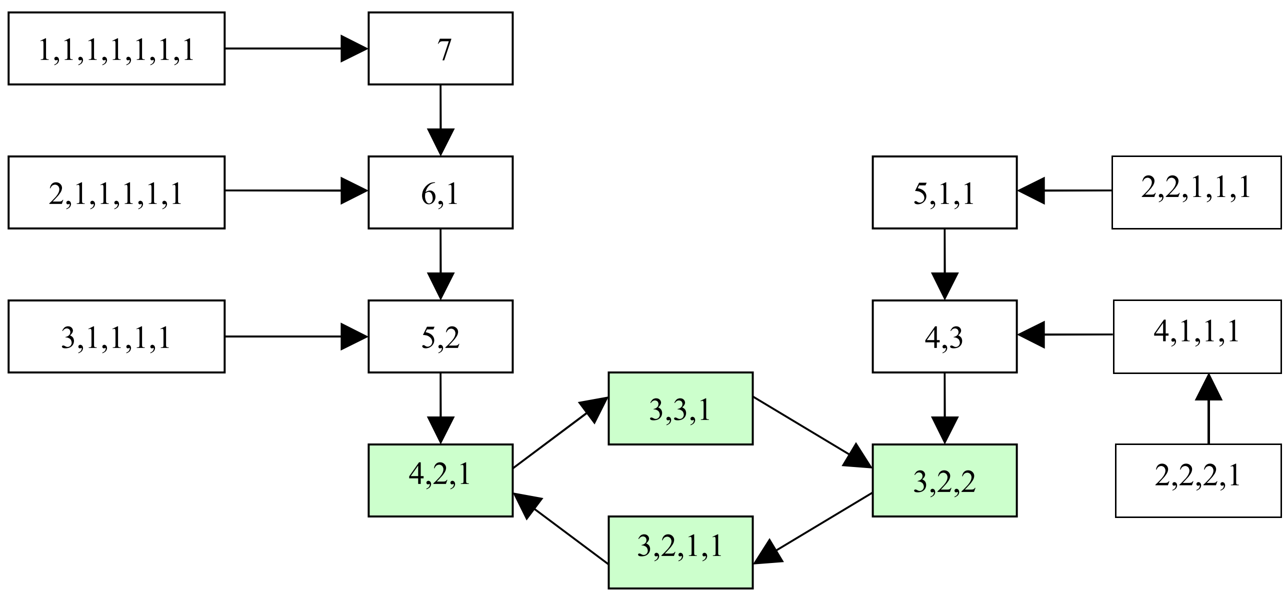
Exercice 1 Un problème de tas

Le graphe ci-dessous donne l'évolution des répartitions à partir d'une répartition quelconque :



Question 1
En partant de la répartition (7), en trois manipulations on obtient la répartition (4,2,1).
Puis quatre manipulations redonnent à nouveau (4,2,1) et ainsi de suite.
Comme 2007 = 501 x 4 + 3 , après 2007 manipulations, on aura encore la répartition (4,2,1).

Questions 2 et 3
On raisonne de même qu'en question 1, mais en sens contraire et en tenant compte du fait qu'au bout de quelques manipulations on rentre dans le cycle des quatre répartitions en vert sur le graphique, et que par ailleurs 2007 manipulations reviennent en général à 3 manipulations. Pour chacune des quatre répartitions du cycle (en vert), on peut déterminer quelles répartitions initiales permettent d'y aboutir en 2007 (c'est-à-dire en 3) manipulations. Il suffit donc de remonter de trois flèches. On obtient donc le résultat suivant :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)
(6,1) (3,1,1,1,1) (3,2,2)	(3,3,1)
(5,2) (3,2,1,1) (2,2,1,1,1) (2,2,2,1)	(3,2,2)
(4,2,1) (5,1,1) (4,1,1,1) ((1,1,1,1,1,1,1)	(3,2,1,1)

Ainsi pour la question 2 :

Les répartitions initiales suivantes…	aboutissent en 2007 manipulations à
(7) (2,1,1,1,1,1) (3,3,1) (4,3)	(4,2,1)

Et pour la question 3, seule la répartition finale (3,3,1) pouvait faire hésiter Virginie entre trois répartitions initiales.

Exercice 2 Des trapèzes de même aire

1) De l'égalité $m^2-p^2=8$, on déduit (*) : $m^2=p^2+8$ donc : $p<m<p+3$, et $m=p+1$ ou $m=p+2$.

Avec $m=p+1$, (*) est impossible. Avec $m=p+2$, il vient $p=1$ et $m=3$.

2) une étude simple de la figure (à partir de triangles rectangles isocèles par exemple) permet d'établir que :

DC= AB-AD ; MN=AB-2

L'égalité des aires conduit alors à : $(AB-4)^2-(AD-AB)^2=8$.

On obtient avec 1) : AB=7, AD=6, DC=1.

On peut aussi travailler à partir d'un pavage du « grand » triangle obtenu en prolongeant (AD) et (BC).

Exercice 3 Le jardin

Notons I le point où est planté l'arbre,

E,F,G,H les projetés respectifs de I sur (AB),(BC),(CD),(DA).

On peut écrire :

$AE^2+EI^2=AI^2$ (1) $BE^2+EI^2=BI^2$ (2) $CG^2+GI^2=CI^2$ (3) $DG^2+GI^2=DI^2$ (4)

soit : $AE^2+EI^2=AI^2$ (1) $BE^2+EI^2=BI^2$ (2) $BE^2+GI^2=CI^2$ (3) $AE^2+GI^2=DI^2$ (4)

En effectuant (1)-(2)+(3)-(4), il vient : $AI^2 - BI^2 + CI^2 - DI^2 = 0$

soit $DI^2 = AI^2 - BI^2 + CI^2$ soit $DI^2 = 4^2 - 5{,}1^2 + 7{,}5^2$

soit $DI^2 = 16 - 26{,}01 + 56{,}25$ soit $DI^2 = 46{,}24$ soit $DI = 6{,}8$.

L'arbre est donc situé à 6 mètres 80 du sommet D

Exercice 4 Les dés

1.
Commençons par compter le nombre de dés ayant les chiffres 1 et 2 sur deux faces opposées. Il existe alors trois possibilités pour la face opposée au chiffre 3 : elle sera numérotée 4, 5 ou 6. La face opposée à 3 étant choisie, il n'existe plus qu'une possibilité pour les deux faces restantes. Il existe donc trois dés ayant les chiffres 1 et 2 sur deux faces opposées.
Le choix de 2 étant arbitraire, on peut affirmer que pour k$\in$ $\{2,3,4,5,6\}$, il existe trois dés ayant les chiffres 1 et k sur deux faces opposées.
<u>Conclusion</u> : Il existe 3$\times$ 5=15 dés-numériques distincts dont les faces sont 1, 2, 3, 4, 5, 6.

2.
Sur les faces du premier dé-numérique, on écrit les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sur les faces du second, on écrit 0, 1, 2, 6, 7, 8. Ces deux dés permettent d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année.

3.
Considérons deux dés numériques permettant d'obtenir toutes les dates d'un mois quelconque de l'année. On note A l'ensemble des chiffres écrits sur les faces du premier dé et B l'ensemble des chiffres écrits sur les faces du deuxième dé.

On doit pouvoir obtenir les dates 11 et 22. Il est donc nécessaire que : 1$\in$ A, 1$\in$ B, 2$\in$ A et 2$\in$ B.
Supposons que 0 soit écrit sur un seul des deux dés. Comme on doit pouvoir obtenir les dates 01, 02, 03, 04, 05, 06 et 07, il faudrait que 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7 soient écrits sur les faces de l'autre dé, ce qui est impossible vu que ce dé ne possède que six faces. Il est donc nécessaire que : 0$\in$ A et 0$\in$ B.
Sur chaque dé, il reste trois faces vierges et six chiffres à écrire : 3, 4, 5, 6, 7 et 8. Quel que soit le choix effectué pour écrire ces six derniers chiffres, il sera toujours possible de lire les 31 dates. On peut considérer que : 3$\in$ A. Il reste à choisir deux chiffres parmi 4, 5, 6, 7 et 8 pour compléter A, soit $\frac{5\times 4}{2} = 10$ possibiltés
D'après la question 1, pour chacune de ces 10 possibilités, on peut construire 15 dés-numériques distincts avec l'ensemble A et autant avec l'ensemble B.

<u>Conclusion</u> : Il existe 10$\times$ 15$\times$ 15=2250 paires de dés-numériques possédant la propriété de la question 2.

4.

D'après la question 3, on a : N$\geq$ 31.

On remarque que deux dés-numériques permettant d'obtenir tous les entiers de 1 à 31 permettent aussi d'obtenir tous les entiers de 1 à 32, donc N$\geq$ 32.
Supposons qu'il existe deux dés-numériques permettant d'obtenir tous les entiers de 1 à 33. On doit pouvoir obtenir la date 33. Il est donc nécessaire que 3 (comme 0, 1 et 2) soit écrit sur les deux dés. Il reste donc deux faces vierges sur chaque dé et 5 chiffres à écrire, ce qui est impossible.

<u>Conclusion</u> : N=32.