OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2009

ACADEMIE DE BESANÇON

Durée : 4 heures

Le sujet comprend quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre voulu. Les calculatrices sont autorisées.

Recommandations

Il est important que vous argumentiez vos affirmations.

Même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Exercice 1 : les triangles magiques

Partie A : Questions préliminaires :

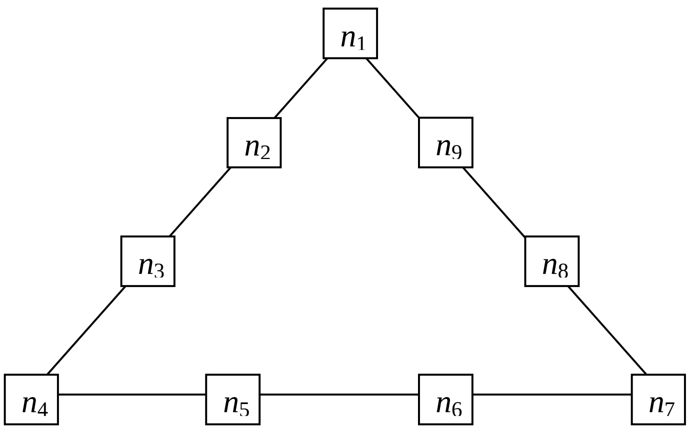
On considère trois entiers deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

1. Quelle est la plus petite valeur possible pour leur somme ?

2. Quelle la plus grande valeur possible pour leur somme ?

Partie B : Les triangles magiques :

On place **tous les nombres entiers de 1 à 9** dans les neuf cases situées sur le pourtour d'un triangle, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

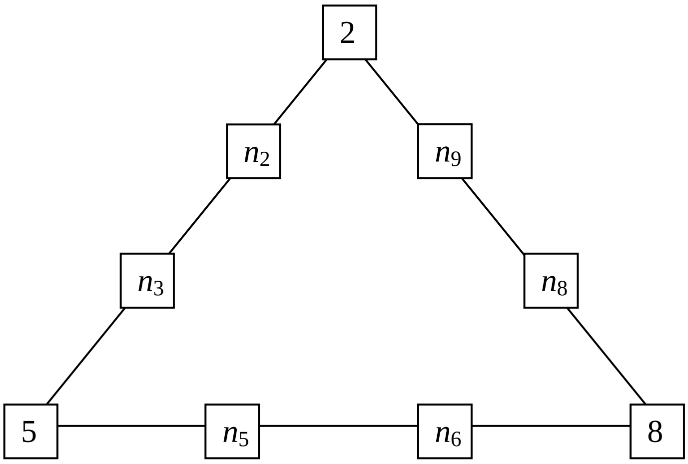


Si les sommes des quatre nombres situés sur chacun des trois côtés du triangle ont la même valeur *S*, on dit que le triangle est *S*-magique.

(c'est-à-dire si : $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_4 + n_5 + n_6 + n_7 = n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = S$)

On se propose de déterminer toutes les valeurs possibles de S.

3. Compléter le triangle suivant de sorte qu'il soit 20-magique, c'est-à-dire S-magique de somme $S = 20$.



4. On considère un triangle S-magique et on appelle T la somme des nombres placés sur les trois sommets.
- **a.** Prouver qu'on a $45 + T = 3S$.
- **b.** En déduire qu'on a $17 \leq S \leq 23$.
- **c.** Donner la liste des couples $(S\ ,\ T)$ ainsi envisageables.

5. Proposer un triangle 17-magique.

6. Prouver qu'il n'existe pas de triangle 18-magique.

7. **a.** Montrer que dans un triangle 19-magique, 7 est nécessairement situé sur un sommet du triangle.
- **b.** Proposer un triangle 19-magique.

8. Prouver que, s'il existe un triangle S-magique, alors il existe aussi un triangle $(40 - S)$-magique.

9. Pour quelles valeurs de S existe-t-il au moins un triangle S-magique ?

Exercice 2 : un problème de pliage

On plie une feuille de papier rectangulaire le long d'une de ses diagonales ; on coupe les parties qui ne se recouvrent pas puis on déplie la feuille.
On admet qu'ainsi on obtient toujours un losange (cette propriété sera démontrée dans la dernière question de l'exercice).
L'unité de longueur choisie est le centimètre.

1. Construire le losange obtenu à partir d'une feuille rectangulaire de longueur $L = 16$ et de largeur $l = 8$.

Les questions suivantes sont indépendantes.

On pourra noter *c* la longueur du côté du losange.

2. Dans cette question, la feuille rectangulaire de départ a pour longueur 16 et pour largeur 8. Calculer la longueur du côté du losange.

3. On veut maintenant obtenir un losange de côté 7,5 à partir d'une feuille dont les dimensions (longueur et largeur) sont des nombres entiers.
Quelles sont les dimensions possibles pour la feuille de départ ?

4. À partir d'une feuille de longueur L, on a obtenu un losange dont l'aire est égale à 75 % de celle de la feuille de départ.
Exprimer, en fonction de L, la largeur l de la feuille de départ.

5. Démontrer le résultat admis initialement, à savoir que la manipulation décrite en début d'énoncé conduit toujours à un losange.

Exercice 3 : promenade parmi les nombres

On part du nombre 5 et on s'autorise à utiliser deux opérateurs :

- L'opérateur (M) « multiplier par 2 » : $n \to 2 \times n$
- L'opérateur (R) « retrancher 3 » : $n \to n - 3$

Un entier naturel N est dit admissible s'il est possible, en partant de 5 et en n'utilisant que les deux opérateurs ci-dessus, de parvenir en un certain nombre d'étapes au nombre N.

Par exemple 25 est admissible par le chemin à cinq étapes :

$$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{M} 28 \xrightarrow{R} 25\,.$$

On considérera par convention que 5 est admissible (chemin avec 0 étape)

1. Quels sont les entiers naturels admissibles en au plus 3 étapes ?

2. Montrer que 11, 13, 16 et 19 sont aussi admissibles.

3. Certains entiers naturels sont non admissibles : lesquels ? Justifier.

4. Montrer que 2009 est admissible en présentant une méthode permettant de trouver le chemin menant de 5 à 2009 (une telle méthode est aussi appelée *algorithme*).

Exercice 4 : tableau des scores d’une poule de championnat

On s’intéresse aux tableaux de score obtenus à l’issue d’une poule d’un championnat sportif.

Dans une telle poule, chaque équipe rencontre chacune des autres ;

- en cas de match nul on attribue 1 point à chaque équipe ;
- sinon : on attribue 3 points à l’équipe gagnante et 0 point à l’équipe perdante.

Par exemple : si une poule comporte 3 équipes nommées A, B et C, on aura 3 matchs : A contre B, A contre C, B contre C. Si A perd ses deux matchs et que B gagne contre C, A totalisera 0 point, B 6 points et C 3 points.

Le tableau de la poule sera dans ce cas le suivant :

1°	B	6
2°	C	3
3°	A	0

Seule nous intéresse ici la troisième colonne ; nous la coderons $\boxed{630}$.

Attention, dans un tel code $\boxed{xyz}$, on aura toujours $x \geqslant y \geqslant z$.

Autre exemple : si les trois matchs donnent un résultat nul, le code obtenu sera $\boxed{222}$.

1. Dans cette question, la poule comporte 3 équipes. Combien de codes possibles obtient-on ? (on connaît déjà 630 et 222)

2. Dans toute la suite, la poule comporte 4 équipes.

a. Si on sait qu’une équipe gagne tous ses matchs, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

b. Si on sait que le premier du groupe a totalisé 4 points, combien de codes possibles peut-on obtenir ?

Les candidats intéressés pourront poursuivre leur recherche hors-olympiades et rechercher tous les codes possibles avec 4 équipes… Réponse sur le site…