OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2008

ACADEMIE DE BESANÇON

Durée : 4 heures

Le sujet comprend quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre voulu. Les calculatrices sont autorisées.

Recommandations

Il est important que vous argumentiez vos affirmations.
Même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Exercice 1 Les bons nombres

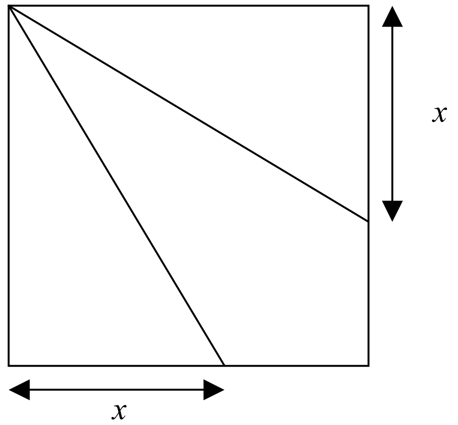
On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ». Ainsi, par exemple :

$2 = 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais ».

$3 = 1 + 2$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \neq 1$; $3 = 1 + 1 + 1$ et $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \neq 1$; donc 3 est également « mauvais ».

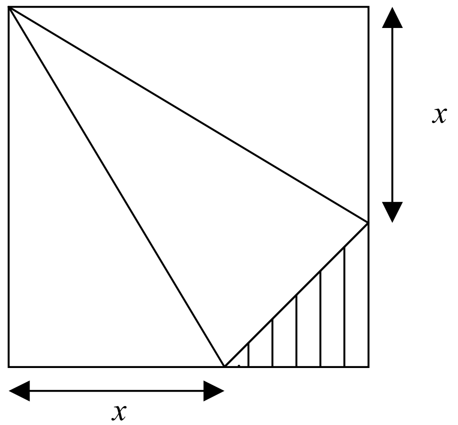
1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».
3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bons ».
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bons ».
   Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 2 Un partage équitable



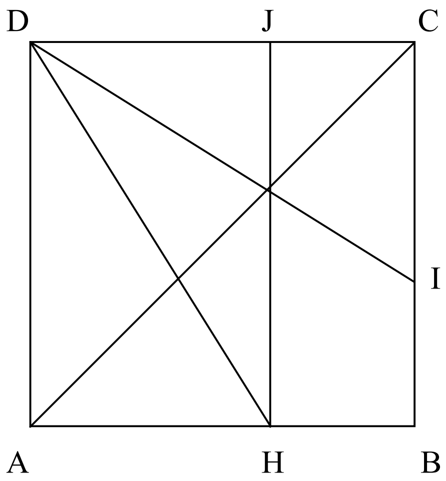
1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre.

Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire hachurée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.

Peuvent-elles avoir la même aire ?

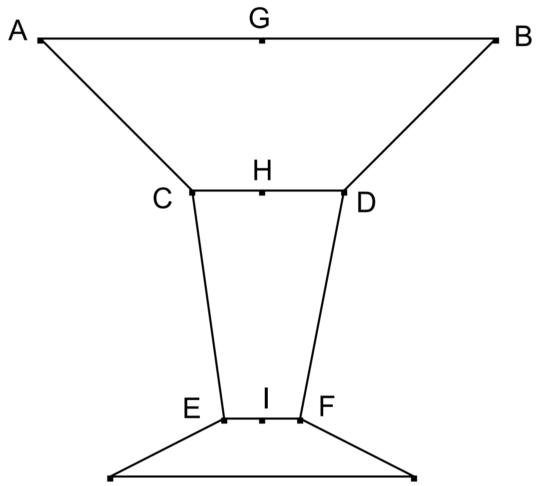


3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes.

Qu'en est-il ?

Exercice 3 Le verre à cocktail

Un verre à cocktail spécial est formé d'une base pleine, surmontée d'un pied en forme de tronc de cône puis d'un autre tronc de cône plus évasé. Les dimensions sont indiquées ci-dessous.



Le verre à cocktail

AB = 12 cm
CD = 4 cm
EF = 2 cm
GH = 4 cm
HI = 6 cm

Dessin fait à l'échelle 1/2

De la glace pilée au fond du verre doit occuper un sixième du volume. La boisson elle-même doit comporter 1/4 de sirop et 3/4 de limonade. Le verre doit être rempli à ras bords.

Mon ami me conseille de remplir de glace pilée le tronc de cône inférieur (jusqu'à la limite CD) puis de remplir de sirop jusqu'à 2 cm du bord supérieur.
Son conseil est-il bon ?

On rappelle que le volume d'un cône est donné par la formule $V = \frac{1}{3}(\pi R^2) \times h$

Exercice 4 Le chameau et les bananes

Je suis face au désert avec un stock de bananes.
Le chameau qui va me transporter ne peut porter plus de mille bananes à la fois et en consomme une par kilomètre.

Partant de ma ville, j'espère atteindre un marché situé à 1000 km où je compte vendre mes bananes. Je dispose d'un stock de trois mille bananes.

1. Montrer qu'il est possible d'apporter au moins deux cents bananes au marché.

2. Améliorer la solution précédente. Quel est le nombre maximal de bananes que je pourrai vendre au marché ?

Corrigés

Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à :

http ://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques/Olympiades-1S.

Remarque : pour une résolution complète du premier problème, on pourra consulter la publication *quadrature, n°3, avril 1990.*