OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2006

ACADEMIE DE BESANCON

DUREE : 4 heures

Le sujet comprend quatre exercices indépendants ; ils peuvent être traités dans l'ordre voulu.
Les calculatrices sont autorisées.

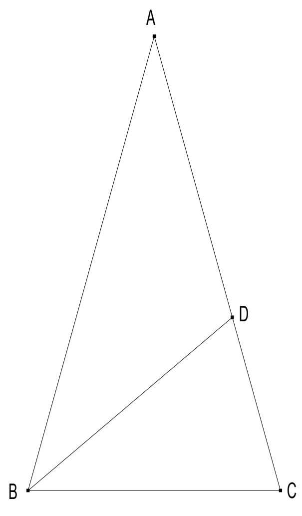
Recommandations

Il est important que vous argumentiez vos affirmations.
Même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.
De même, si vous découvrez une erreur dans vos résultats ou votre démarche, il est bon de le signaler et, si possible, de l'expliquer.

Corrigés

Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à
http ://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques/Olympiades-1S.

Exercice 1 : le triangle d'or



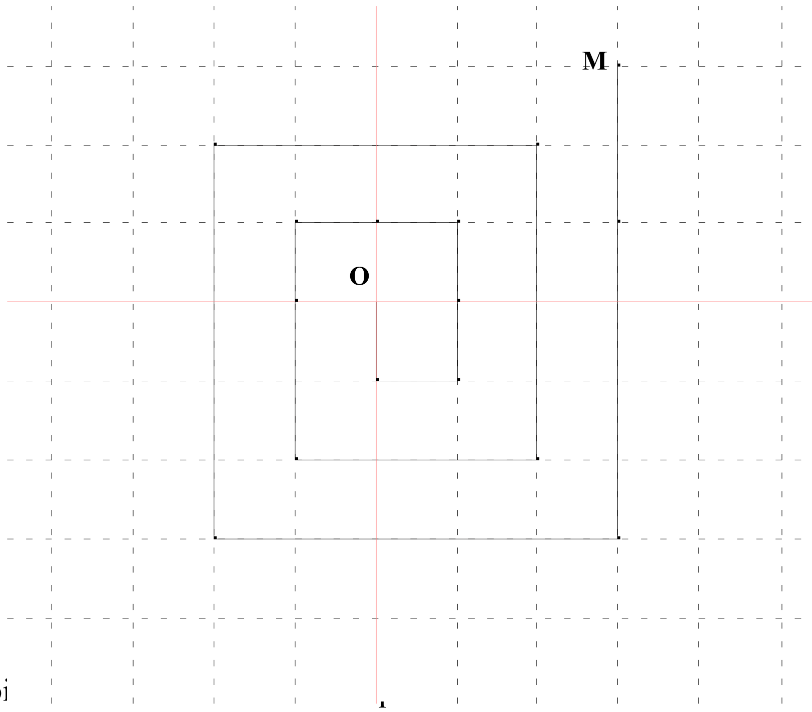
ABC est un triangle isocèle de sommet *A* « très particulier » : en effet en menant de *B* la bissectrice du secteur *ABC*, on constate qu'elle coupe [*AC*] en un point *D* tel que *BCD* est à son tour un triangle isocèle, de sommet *B*.

1. Montrer que la mesure en radians de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\dfrac{\pi}{5}$
2. Donner alors la mesure en radians des autres angles de cette configuration.
3. Montrer que . $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BC}{CD}$
4. Sachant que $BC=1$, déterminer *AB*.
5. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 2 : la « spirale »

Le plan, muni d'un repère orthonormal d'origine O (unité 1 cm), est quadrillé par les droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par tous les points à coordonnées entières du

plan. Sur ce quadrillage on construit, en partant du point O vers le bas, une ligne brisée en forme de « spirale » qui « tourne dans le sens contraire des aiguilles d'une montre », conformément au dessin ci-dessous.
Pour tout point M à coordonnées entières, on note *l(*M*)* la longueur de la portion de « spirale » qui va du point O jusqu'au point M.



1) Soit A un poi
   Déterminer les valeurs possibles de *l*(A).

2) Soit B le point de coordonnées (2005 ; 2006).
   Déterminer *l*(B).

3) Déterminer les coordonnées du point C tel que *l*(C)=2006.

4) La « spirale » passe-t-elle effectivement par tous les points à coordonnées entières du plan ?

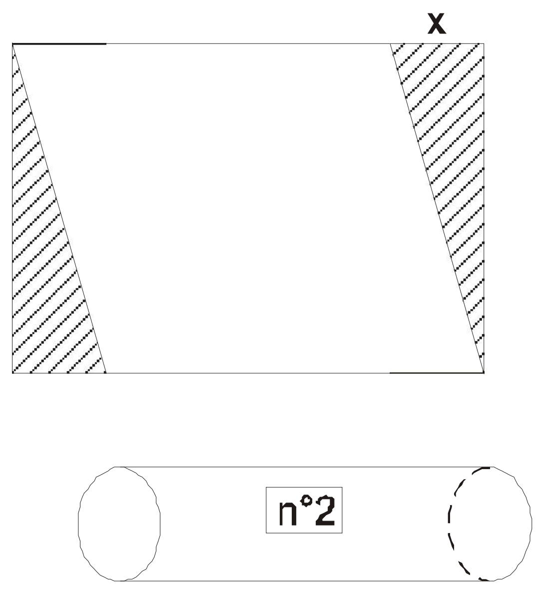
On rappelle le résultat suivant :

Pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+\ldots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 3 : les cylindres en papier

1. On prend une feuille de papier de 21 cm de large et 29,7 cm de long (le format A4). On forme un cylindre en roulant la feuille de papier et en faisant coïncider deux bords opposés. En faisant de même avec les deux autres bords opposés, on obtient un autre cylindre.
Les deux cylindres ont-ils même volume ?

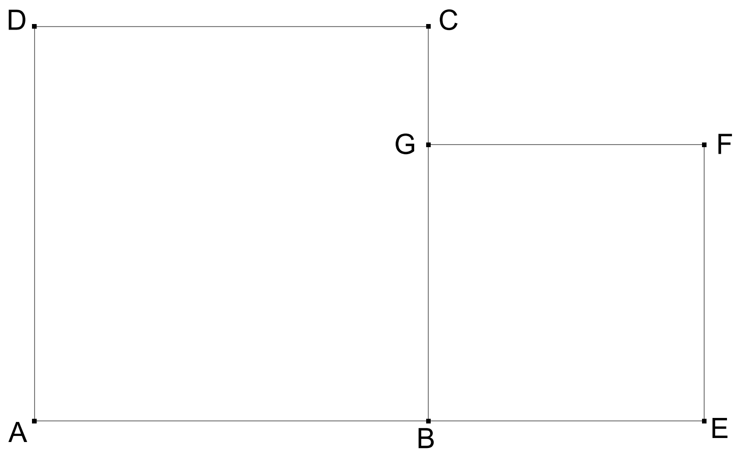
2. Dans une feuille de papier de format A4, on enlève deux triangles de mêmes dimensions selon la figure ci-dessous :



Si on roule la feuille restante bord à bord, on obtient un premier cylindre (n°1). Si on la roule en faisant coïncider les autres bords opposés, on obtient un second cylindre (n°2).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) pour que les deux cylindres ainsi obtenus aient le même volume.

Exercice 4 : deux carrés en un



ABCD et BEFG sont deux carrés dont les côtés ont pour longueurs respectives a et b, de telle sorte que $a > b$.

1) Soit I le point d'intersection des droites (EG) et (DF).
Démontrer que I est le milieu du segment [FD].

2) Soit Γ le cercle de centre I passant par le point B.
On note H le deuxième point d'intersection de Γ avec la droite (AB).
Justifier que [FD] est un diamètre de Γ, puis démontrer que la droite (IH) est la médiatrice de [FD].

3) Soit J le point d'intersection des droites (BG) et (HF).
On « découpe » la figure initiale selon les triangles EFH, FGJ, ADH et le quadrilatère CDHJ.
Montrer qu'en assemblant ces 4 polygones sans les superposer, on peut reconstituer un carré. Faire un dessin avec $a = 4$ cm et $b = 3$ cm.

4) Exprimer la longueur $c = \text{DH}$ en fonction de a et b.