Exercice 1 : Les bons nombres

Solution

1. $4 = 2 + 2$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ donc $\boxed{\text{4 est bon}}$.

   Remarquons que comme $\frac{1}{1} = 1$, 1 est bon mais le nombre 1 ne peut entrer dans une décomposition d'un autre nombre que 1 puisque si $n = 1 + \dots$, alors $\frac{1}{1} + \frac{1}{\dots} + \dots > 1$.

   Remarquons aussi que l'ordre n'intervient du fait de la commutativité de l'addition donc on peut supposer qu'on écrit n comme une somme $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ avec la condition $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_k$.

   Pour 5, la seule décomposition possible est donc $5 = 2 + 3$

   et comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$, $\boxed{\text{5 est mauvais}}$.

   Pour 6, les décompositions possibles sont :

   - $6 = 2 + 2 + 2$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \neq 1$
   - $6 = 2 + 4$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1$
   - $6 = 3 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$ donc $\boxed{\text{6 est mauvais}}$.

   Pour 7, les décompositions possibles sont :

   - $7 = 2 + 2 + 3$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq 1$
   - $7 = 2 + 5$ mais $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} \neq 1$

- $7 = 3 + 4$ mais $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{7 est mauvais}}$.

Pour 8, les décompositions possibles sont :

- $8 = 2 + 2 + 2 + 2$ mais $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \neq 1$
- $8 = 2 + 2 + 4$ mais $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} \neq 1$
- $8 = 2 + 3 + 3$ mais $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \neq 1$
- $8 = 2 + 6$ mais $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6} \neq 1$
- $8 = 3 + 5$ mais $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} \neq 1$
- $8 = 4 + 4$ mais $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} \neq 1$ donc $\boxed{\text{8 est mauvais}}$

La décomposition $9 = 3 + 3 + 3$ avec $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$ montre que $\boxed{\text{9 est bon}}$

La décomposition $10 = 2 + 4 + 4$ avec $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = 1$ montre que $\boxed{\text{10 est bon}}$

2. Il suffit d'écrire $a = b^2 = b \times b = \underbrace{b + b + \ldots + b}_{b \text{ fois}}$ avec $\underbrace{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{b} + \ldots + \dfrac{1}{b}}_{b \text{ fois}} = b \times \dfrac{1}{b} = 1$

   pour justifier que $\boxed{\text{tout « carré parfait » } a \text{ est bon}}$.

3. Si n est bon, $n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ avec $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_k} = 1$, alors

   a. $2n + 2 = 2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_k + 2$ et

   $$\frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = 1$$

   donc $\boxed{2n + 2 \text{ est bon}}$.

b. $2n+9=2a_1+2a_2+...+2a_k+3+6$

$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+...+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}=1$$

donc $\boxed{2n+9 \text{ est bon}}$.

4. Soit a un nombre tel que $a \geqslant 55$.

Supposons que tout nombre k de l'intervalle $[\![24;a]\!]$ soit bon.

Comme $24 \leqslant k \leqslant a$, on a $50 \leqslant 2k+2 \leqslant 2a+2$, et comme $2k+2$ est bon

que par ailleurs : $[\![a;2a]\!] \subset [\![50;2a+2]\!]$ puisque $50 < a < 2a < 2a+2$,

$\boxed{\text{tout nombre pair de l'intervalle } [\![a;2a]\!] \text{ est bon}}$.

Comme $24 \leqslant k \leqslant a$, on a $57 \leqslant 2k+9 \leqslant 2a+9$

et comme $a \geqslant 55$ et que 55 est bon, comme de plus $2k+9$ est bon,

que par ailleurs : $[\![a;2a]\!] \subset [\![55;2a+9]\!]$ puisque $55 \leqslant a < 2a < 2a+9$,

$\boxed{\text{tout nombre impair de l'intervalle } [\![a;2a]\!] \text{ est bon}}$.

Ainsi tout nombre de $[\![a;2a]\!]$ est bon et donc tout nombre de $[\![24;2a]\!]$ est bon.

On agrandit ainsi l'intervalle des bons de $[\![24;a]\!]$ à $[\![24;2a]\!]$.

Or $[\![24;55]\!]$ est un intervalle de bons. Donc $[\![24;110]\!]$, puis $[\![24;220]\!]$ etc…

En réitérant le processus à l'infini, on montre que tout entier naturel supérieur ou égal à 24 finit par être dans un tel intervalle donc est bon.

Exercice 2 : Un partage équitable

Question 1

Chaque triangle rectangle aura une aire égale au tiers de l'aire du carré.

Il vient $\frac{x \times 1}{2} = \frac{1}{3}$ soit :

$$\boxed{x = \frac{2}{3}}.$$

Question 2

L'aire du petit triangle est égale à $\frac{(1-x)^2}{2}$, donc l'aire de chaque triangle rectangle sera le tiers de l'aire restante.

Il vient $\frac{x \times 1}{2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(1-x)^2}{2}\right)$ soit $x^2 + x = 1$ soit comme $x > 0$:

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618}$$

Question 3

Il existe de multiples solutions (analytiques ou autres…), la plus jolie me semble une application immédiate des propriétés du nombre x, par le seul fait qu'il est solution de $x^2 + x = 1$, et donc sans utiliser sa valeur.

Soit K le point d'intersection des droites (HJ) et (DI).

En appliquant le thèorème de Thalès dans le triangle (ICD), il vient : $\frac{\text{DJ}}{\text{JK}} = \frac{\text{DC}}{\text{CI}}$ soit $\frac{x}{\text{JK}} = \frac{1}{x}$ d'où $\text{JK} = x^2 = 1 - x = \text{JC}$.

Donc le triangle CJK est rectangle et isocèle donc $\widehat{JCK} = 45°$.

Ainsi C, K et A sont alignés. Autrement dit

$$\boxed{\text{les droites (HJ), (DI) et (AC) sont concourantes}}$$

Exercice 3 : Le verre à cocktail

- volume du tronc de cône supérieur $V = \frac{1}{3}\pi\left(6^2 \times 6 - 2^2 \times 2\right) = 208 \times \frac{\pi}{3}$
- volume du tronc de cône inférieur $V = \frac{1}{3}\pi\left(2^2 \times 12 - 1^2 \times 6\right) = 42 \times \frac{\pi}{3}$
- volume total : $V = 250 \times \frac{\pi}{3}$

  $250/6 \approx 41,67$ donc le conseil pour la glace pilée est bon
- volume de limonade si on suit le conseil : $V = \frac{1}{3}\pi\left(6^2 \times 6 - 4^2 \times 4\right) = 152 \times \frac{\pi}{3}$
- $152/208 \approx 0,73$ donc le conseil pour le sirop est assez bon…

Exercice 4 : Le chameau et les bananes

Il fallait penser qu'on pouvait faire des stations intermédiaires où poser les bananes.

1. Ainsi on pouvait par exemple :

- ♦ partir avec 1000 bananes, parcourir 400 km, laisser 200 bananes sur place, et refaire les 400 km en sens inverse
- ♦ repartir avec 1000 bananes, parcourir les 400 km :
- ♦ on se retrouve avec 800 bananes (200 laissées sur place, 600 non mangées)
- ♦ on se dirige alors vers la marché dont on est éloigné de 600 km
- ♦ on arrive ainsi avec 200 bananes (mais on en a laissé 1000 au départ).

2. La meilleure solution possible est : 533 bananes ; démontrer que c'est la meilleure n'est pas une mince affaire, mais on peut au moins la décrire :

- effectuer deux fois le trajet suivant :
  - partir avec 1000 bananes, parcourir 200 km, en poser 400 à l'arrêt n°1,
  - refaire les 200 km en sens inverse.
- Puis repartir une dernière fois avec 1000 bananes, parcourir 200 km :
- on se trouve alors à l'arrêt n°1 avec 800 + 400 + 400 = 2000 bananes
- repartir avec 1000 bananes, parcourir 333 km, en poser 334 à l'arrêt n°2 ;

  refaire les 333 km en sens inverse
- reprendre les 1000 bananes restées à l'arrêt 1
- parcourir les 333 km vers l'arrêt n°2 :

  je retrouve alors 667+334 = 1001 bananes ; j'en mange une

  le marché est à 1000 – 200 – 333 = 467 km
- je repars avec 1000 bananes et j'arrive au marché avec 1000 – 467 = 533 bananes

Remarque : j'ai raisonné avec des « bananes entières » ; ce qui suppose que le chameau consomme une banane entière à la fin de chaque kilomètre parcouru ; mais si le chameau consomme sa banane régulièrement au long de chaque kilomètre, je peux améliorer la solution et ramener 533 bananes et un tiers de banane. Qui dit mieux ?… Apportez vos solutions ou vos questions à rene.ligier @ wanadoo.fr