Annexe 2

Mathématiques

Introduction générale pour le collège

1. Finalités et objectifs

À l'école primaire, une proportion importante d'élèves s'intéresse à la pratique des mathématiques et y trouve du plaisir. Le maintien de cet intérêt pour les mathématiques doit être une préoccupation du collège. Il est en effet possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable, avec son lot de questions ouvertes, de recherches pleines de surprises, de conclusions dont on parvient à se convaincre. Une telle activité, accessible aux élèves, a une valeur formatrice évidente et leur permet d'acquérir les savoirs et savoir-faire qui leur seront nécessaires.

1.1. Les mathématiques comme discipline de formation générale

Au collège, les mathématiques contribuent, avec d'autres disciplines, à entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique. L'objectif est de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique. Elles contribuent ainsi à la formation du futur citoyen.
À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution.

1.2. L'outil mathématique

Les méthodes mathématiques s'appliquent à la résolution de problèmes courants. Elles ont cependant leur autonomie propre et l'efficacité des concepts qu'elles étudient, due à leur universalité, leur permet d'intervenir dans des domaines aussi divers que les sciences physiques, les sciences de la vie et de la terre, la technologie, la géographie... Certaines de ces disciplines entretiennent des liens très étroits avec la discipline mathématique qui leur apporte l'efficacité de ses outils et, en retour, nourrit sa réflexion des problèmes qu'elles lui soumettent.
L'enseignement tend à la fois à développer la prise de conscience de cette autonomie par les élèves et à montrer que l'éventail des utilisations est très largement ouvert. Au collège, est visée la maîtrise de techniques mathématiques élémentaires de traitement (organisation de données, représentations, mises en équation) et de résolution (calculs et équations bien sûr, mais aussi constructions). Leur emploi dans la prévision et l'aide à la décision est précieux dans de multiples circonstances, de la gestion familiale à l'activité scientifique ou professionnelle.

1.3 Les mathématiques comme discipline d'expression

Les mathématiques participent à l'enrichissement de l'emploi de la langue par les élèves, en particulier par la pratique de l'argumentation. Avec d'autres disciplines, les mathématiques ont également en charge l'apprentissage de différentes formes d'expression autres que la langue usuelle (nombres, symboles, figures, tableaux, schémas, graphiques) ; elles participent ainsi à la construction de nouveaux langages. L'usage largement répandu des moyens actuels de traitement de l'information et de communication exige une bonne maîtrise de ces formes variées d'expression.

2. Le socle commun

Le socle commun des connaissances et des compétences recouvre en mathématiques la quasi totalité des champs du programme, la différence entre le programme proprement dit et le socle commun résidant surtout dans le degré d'approfondissement et dans l'expertise attendue. De plus, pour la maîtrise de nombreux concepts, un temps d'appropriation plus important est laissé aux élèves.
Certes, quelques connaissances inscrites dans les programmes ne figurent pas dans les compétences du socle (trigonométrie, équation, fonctions, …) mais c'est essentiellement au niveau des capacités attendues et des activités proposées que la différence entre les exigibles apparaît. Elles sont identifiées dans les programmes par un recours aux caractères italiques, signalé systématiquement.
Sur deux points importants, le socle commun se démarque de façon importante du programme :
- dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue ;
- dans le domaine géométrique, les élèves doivent apprendre à raisonner et à argumenter, mais l'écriture formalisée d'une démonstration de géométrie n'est pas un exigible du socle.

De plus, il faut prendre en compte, à propos des connaissances et capacités relatives aux nombres en écriture fractionnaire, que le travail sur les quotients est exigeant et doit être conduit sur les quatre années de collège. Au niveau des exigibles du socle commun, toute technicité est exclue, puisque – dans l'esprit général du socle – on se limite à des problèmes simples, proches de la vie courante, utilisant des nombres en écriture fractionnaire.

3. Organisation des contenus

Les quatre parties des programmes des classes du collège s'organisent autour des objectifs suivants :

• organisation et gestion de données, fonctions
- maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
- approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
- s'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
- acquérir quelques notions fondamentales de statistique descriptive.

• nombres et calcul
- acquérir différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants ;
- se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés ;
poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;
- assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).

• géométrie
- passer de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés (passage du dessin à la figure) ;
- isoler dans une configuration les éléments à prendre en compte pour répondre à une question ;
- être familiarisé avec des représentations de l'espace, notamment avec l'utilisation de conventions usuelles pour les traitements permis par ces représentations ;
- découvrir quelques transformations géométriques simples : symétries, translations, rotations ;
–se constituer un premier répertoire de théorèmes et apprendre à les utiliser.

• Grandeurs et mesure
- se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;
- connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
- calculer avec les unités relatives aux grandeurs étudiées, ainsi qu'avec les unités de quelques grandeurs quotients et grandeurs produits.

Ces programmes sont construits de manière à permettre une acquisition et un approfondissement progressifs des notions sur toute la durée du collège. Leur mise en oeuvre est enrichie par l'emploi des instruments actuels de calcul, de dessin et de traitement (calculatrices, ordinateurs).

4. Organisation des apprentissages et de l'enseignement

Les enseignants ont le libre choix de l'organisation de leur enseignement, dans le respect des programmes. Il importe cependant d'éviter l'émiettement et de faciliter la bonne structuration des savoirs et des méthodes, en particulier en vue d'une initiation progressive au raisonnement déductif.

Une difficulté de l'enseignement au collège vient de la double nécessité de traiter la totalité du programme et d'assurer à tous les élèves la maîtrise des éléments du socle. En mathématiques, c'est à travers une pédagogie différenciée basée sur la résolution de problèmes et la mise en activité de la totalité des élèves que ce double objectif peut être atteint.

Il est nécessaire d'entretenir les capacités du programme des classes antérieures, indispensables à la poursuite des apprentissages et à la maîtrise du socle commun par tous les élèves. Cet entretien doit être assuré non par des révisions systématiques mais par des activités appropriées, notamment des résolutions de problèmes.

4.1. Une place centrale pour la résolution de problèmes

La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. Ainsi, les connaissances peuvent prendre du sens pour l'élève à partir des questions qu'il se pose et des problèmes qu'il résout. Les situations choisies doivent :
- prendre en compte les objectifs visés et une analyse préalable des savoirs en jeu, ainsi que les acquis et les conceptions initiales des élèves ;
- permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises par tous ;
- créer rapidement un problème assez riche pour provoquer des conjectures ;
- rendre possible la mise en jeu, puis la formulation des notions ou des procédures dont l'apprentissage est visé ;
- fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.

Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles.

L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul. Cette utilisation se présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique.

4.2. Une prise en compte des connaissances antérieures des élèves

L'enseignement prend en compte les connaissances antérieures des élèves : mise en valeur des points forts et repérage des difficultés de chaque élève à partir d'évaluations diagnostiques. Ainsi l'enseignement peut-il être organisé au plus près des besoins des élèves, en tenant compte du fait que tout apprentissage s'inscrit nécessairement dans la durée et s'appuie sur les échanges qui peuvent s'instaurer dans la classe.

Il convient de faire fonctionner les notions et « outils » mathématiques étudiés au cours des années précédentes dans de nouvelles situations, autrement qu'en reprise ayant un caractère de révision. En sixième, particulièrement, les élèves doivent avoir conscience que leurs connaissances évoluent par rapport à celles acquises à l'école primaire.

4.3. L'importance des mises en cohérence

Pour être efficaces, les connaissances doivent être identifiées, nommées et progressivement détachées de leur contexte d'apprentissage.

D'une part, toute activité (qui peut s'étendre sur plusieurs séances) doit être complétée par une synthèse. Celle-ci doit porter sur les quelques notions mises en évidence (définitions, résultats, théorèmes et outils de base) que, désormais, les élèves doivent connaître et peuvent utiliser. Elle est aussi l'occasion de dégager les méthodes de résolution de problèmes qui mettent en œuvre ces notions. Il convient, en effet, de préciser à chaque étape de l'apprentissage quelles connaissances sont désormais en place et donc directement utilisables.

D'autre part, il est nécessaire de proposer des situations d'étude dont le but est de coordonner des acquisitions diverses. Dans cette optique, l'enseignant réalise, avec les élèves, des synthèses plus globales, à l'issue d'une période d'étude et propose des problèmes dont la résolution nécessite l'utilisation de plusieurs connaissances. Le traitement de ces problèmes permet de souligner le sens, l'intérêt, la portée des connaissances mathématiques, que ce soit dans d'autres disciplines ou dans la vie quotidienne (pourcentages, échelles, représentations graphiques...). Certains problèmes peuvent prendre appui sur des éléments empruntés à l'histoire des mathématiques. Les moyens modernes de communication (informatique, banques de données, audiovisuel…) sont également utilisés chaque fois que leur usage est justifié.

4.4. Une initiation progressive à la démonstration

La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

À cet égard, deux étapes doivent être distinguées : la recherche et la production d'une preuve, d'une part, la mise en forme de cette preuve, d'autre part. Le rôle essentiel de la première étape (production d'une preuve) ne doit pas être occulté par des exigences trop importantes sur la deuxième (mise en forme de la preuve). Pour cela, la responsabilité de produire les éléments d'une démonstration doit être progressivement confiée aux élèves. À partir des éléments qu'ils fournissent, la mise en forme peut, elle, être réalisée collectivement, avec l'aide de l'enseignant.

Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, « recherche et production d'une preuve » qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.

La prise de conscience de ce qu'est la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.

Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis.

4.5. Mathématiques et langages

En mathématiques, les élèves sont conduits à utiliser la langue ordinaire en même temps qu'un langage spécialisé.

Dans le prolongement de l'école primaire, la place accordée à **l'oral** reste importante. En particulier, les compétences nécessaires pour la validation et la preuve (articuler et formuler les différentes étapes d'un raisonnement, communiquer, argumenter à propos de la validité d'une solution) sont d'abord travaillées oralement en s'appuyant sur les échanges qui s'instaurent dans la classe ou dans un groupe, avant d'être sollicitées par écrit individuellement. Par ailleurs, certaines formulations orales peuvent constituer une aide à la compréhension.

Par exemple il est plus facile, pour un élève, de concevoir que $\frac{2}{3}$ plus $\frac{5}{3}$ égale $\frac{7}{3}$ en verbalisant sous la forme « deux tiers plus cinq tiers est égal à sept tiers » plutôt qu'en oralisant l'écriture symbolique « 2 sur 3 plus 5 sur 3 égale 7 sur 3 ».

Dans le domaine de **l'écrit**, l'objectif est d'entraîner les élèves à mieux lire et mieux comprendre un **texte mathématique**, et aussi à produire des textes dont la qualité est destinée à être l'objet d'une amélioration progressive.

Un moyen efficace pour faire admettre la nécessité d'un **langage précis**, en évitant que cette exigence soit ressentie comme arbitraire par les élèves, est le passage du « faire » au « faire faire ». C'est, lorsque l'élève écrit des instructions pour l'exécution par autrui (par exemple, décrire, pour la faire reproduire, une figure un peu complexe) ou lorsqu'il utilise un ordinateur pour un traitement voulu, que l'obligation de précision lui apparaît comme une nécessité. C'est également le cas lorsque, dans un débat argumentatif, il doit se faire comprendre des autres élèves.

Le **vocabulaire et les notations** ne doivent pas être fixés d'emblée, mais introduits au cours du traitement d'une question, en fonction de leur utilité : ils sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ. Il convient, en particulier, d'être attentif au langage et aux significations diverses d'un même mot.

Les travaux mathématiques sont l'occasion de familiariser les élèves avec l'emploi d'un nombre limité de **notations courantes** qui n'ont pas à faire l'objet d'exercices systématiques (le langage doit rester au service de la pensée et de son expression) :

• dans le domaine numérique : les symboles d'égalité et d'inégalité, les symboles d'opérations (dont les notations puissance et racine carrée au cycle central) et le symbole de pourcentage ;

• dans le domaine géométrique : le symbole d'appartenance, la longueur AB d'un segment d'extrémités A et B, l'angle $\widehat{AOB}$, le segment [AB], la droite (AB), et la demi-droite [AB), puis les notations trigonométriques.

4.6. Différents types d'écrits

Les élèves sont fréquemment placés en situation de production d'écrits. Il convient à cet égard de développer et de bien distinguer trois types d'écrits dont les fonctions sont différentes.

• **Les écrits de type " recherche "** (brouillon) qui correspondent au travail " privé " de l'élève : il ne sont pas destinés à être communiqués, ils peuvent comporter des dessins, des schémas, des figures, des calculs. Ils sont un support pour essayer, se rendre compte d'une erreur, reprendre, rectifier, pour organiser sa recherche. Ils peuvent également être utilisés comme mémoire transitoire en cours de résolution du problème. Si l'enseignant est amené à les consulter pour étudier le cheminement de l'élève, il ne doit ni les critiquer, ni les corriger.

• **Les écrits destinés à être communiqués et discutés** : ils peuvent prendre des formes diverses (affiche, transparent,...) et doivent faire l'objet d'un souci de présentation, de lisibilité, d'explicitation, tout en sachant que, le plus souvent, il seront l'objet d'un échange entre élèves au cours duquel des explications complémentaires seront apportées.

• **Les écrits de référence**, élaborés en vue de constituer une mémoire du travail de l'élève ou de la classe, et donc destinés à être conservés.

4.7. Le travail personnel des élèves

En étude ou à la maison, ce type de travail est nécessaire non seulement pour affermir les connaissances de base et les réinvestir dans des exemples simples mais aussi pour en élargir le champ de fonctionnement et susciter ainsi de l'intérêt pour l'activité mathématique. Il contribue aussi à habituer l'élève à l'indispensable régularité d'un travail autonome, complémentaire de celui réalisé avec le professeur.

Il peut prendre diverses formes :

• résolution d'exercices d'entraînement, combinée avec l'étude de la leçon pour asseoir les connaissances ;

• travaux individuels de rédaction pour développer les capacités d'expression écrite et la maîtrise de la langue ;

• résolution de problèmes variés (exercices de synthèse, énigmes, jeux mathématiques…) pour mettre en œuvre des démarches heuristiques en temps non limité ;

• construction d'objets géométriques divers (frises, pavages, solides,…) en utilisant ou non l'informatique ;

• lectures ou recherches documentaires, en particulier sur l'histoire de la discipline ou plus généralement des sciences pour enrichir les connaissances ;

• constitution de dossiers sur un thème donné.

Pour ces travaux en dehors de la classe, il convient de favoriser l'accès des élèves aux ordinateurs de l'établissement qui doivent être munis des logiciels adéquats.
La correction individuelle du travail d'un élève est une façon d'en apprécier la qualité et de permettre à son auteur de l'améliorer, donc de progresser.
Le travail personnel proposé **en classe** aux élèves peut prendre chacune des formes décrites ci-dessus, en tenant compte, chaque fois, de la durée impartie. Il faut veiller à un bon équilibre entre ces diverses activités.
Ces travaux doivent être différenciés en fonction du profil et des besoins des élèves, ainsi que des objectifs du socle commun.
Le travail en classe proprement dit doit être complété par des séances régulières en salle informatique où l'élève utilise lui-même les logiciels au programme (tableur, grapheur, logiciel de géométrie). Ces séances de travaux pratiques sur ordinateur doivent toujours avoir pour objectif l'appropriation et la résolution d'un problème mathématique. Tout travail en salle informatique doit aboutir à la production d'un écrit, manuscrit ou imprimé.

4.8. L'évaluation

L'évaluation (qui ne se réduit pas au contrôle noté) n'est pas un à-côté des apprentissages. Elle doit y être intégrée et en être l'instrument de régulation, pour l'enseignant et pour l'élève. Elle permet d'établir un constat relatif aux acquis de l'élève, à ses difficultés. Dans cette optique, le travail sur les erreurs constitue souvent un moyen efficace de l'action pédagogique. L'évaluation ne doit pas se limiter à indiquer où en est l'élève ; elle doit aussi rendre compte de l'évolution de ses connaissances, en particulier de ses progrès.
L'évaluation de la maîtrise d'une capacité par les élèves ne peut pas se limiter à la seule vérification de son fonctionnement dans des exercices techniques. Il faut aussi s'assurer que les élèves sont capables de la mobiliser d'eux-mêmes, en même temps que d'autres capacités, dans des situations où leur usage n'est pas explicitement sollicité dans la question posée.
L'évaluation sommative, en mathématiques, est réalisée sous trois formes complémentaires :

- des interrogations écrites courtes dont le but est de vérifier qu'une notion ou une méthode sont correctement assimilées ;
- des devoirs de contrôle courts et peu nombreux qui permettent de vérifier, de façon plus synthétique, la capacité des élèves à utiliser leurs acquis, à la suite d'une phase d'apprentissage ;
- certains devoirs de contrôle peuvent être remplacés par un bilan trimestriel qui est l'occasion de faire le point sur les acquis des élèves relatifs à une longue période d'étude.

4.9. Capacités et activités de formation

Le programme décrit, pour chaque contenu, les capacités élaborées dans chacune des classes du collège. Les commentaires qui les accompagnent apportent un éclairage supplémentaire sur les conditions de leur apprentissage.
La définition de ces capacités vise donc à clarifier les attentes, à préciser les priorités et à fournir des repères dans le but d'aider les enseignants dans leur travail de programmation et dans la mise au point des évaluations qui permettent d'en baliser la réalisation.
Il importe de bien garder à l'esprit que **la liste des capacités, si elle fixe les objectifs à atteindre, ne détermine pas pour autant les moyens pédagogiques à utiliser pour cela**.
L'ordre d'exposé des capacités, pour chaque domaine, ne correspond pas nécessairement à celui de leur apprentissage. D'autant plus que, dans la plupart des cas, ces capacités ne s'acquièrent ni isolément les unes des autres, ni en une seule fois.
Pour prendre sens pour les élèves, les notions mathématiques et les capacités qui leur sont liées doivent être mises en évidence et travaillées dans **des situations riches**, à partir de problèmes à résoudre, avant d'être entraînées pour elles-mêmes.
Il faut également prendre en compte le fait que **tout apprentissage se réalise dans la durée**, **dans des activités variées** et que **toute acquisition nouvelle doit être reprise, consolidée et enrichie**. Dans cette perspective, la répétition d'exercices vides de sens pour l'élève à un moment donné n'est pas la meilleure stratégie pour favoriser la maîtrise d'une capacité. Il convient d'envisager que c'est parfois dans le cadre d'un travail ultérieur, en travaillant sur d'autres aspects de la notion en jeu ou sur d'autres concepts, qu'une capacité non maîtrisée à un certain moment pourra être consolidée.