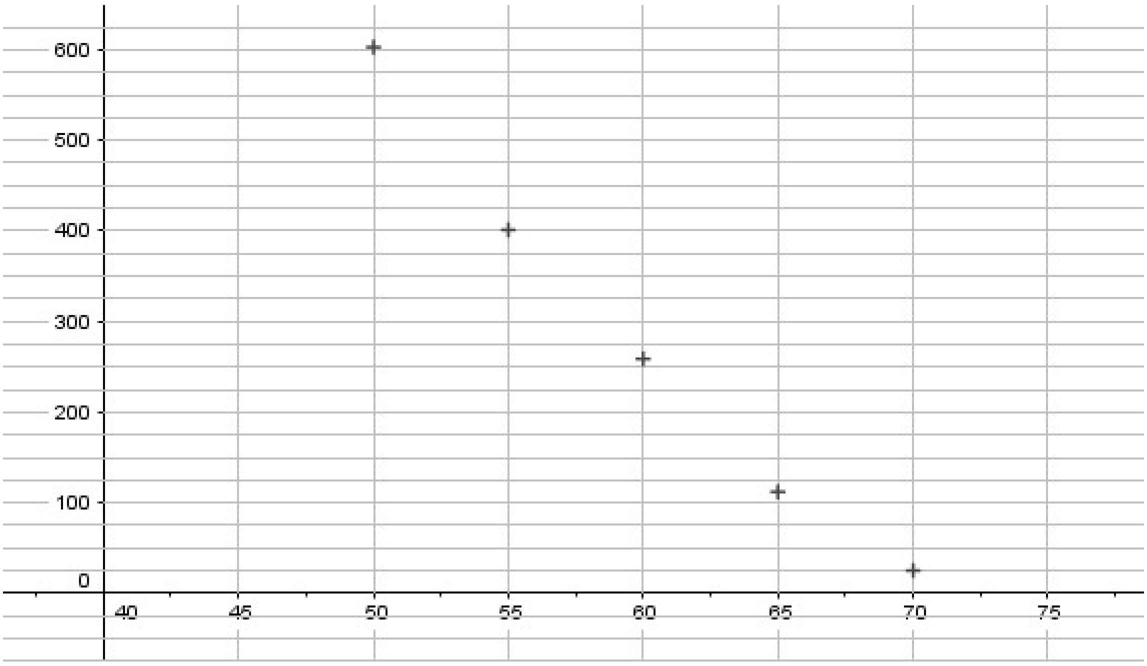
Les créations de monsieur Hart

Eléments de correction

Monsieur Hart, un artiste, a fait mener une étude visant à déterminer quel prix ses clients sont prêts à acheter un certain modèle d'une de ses créations. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant (on considère que tous les clients de Monsieur Hart ont répondu à l'enquête) :

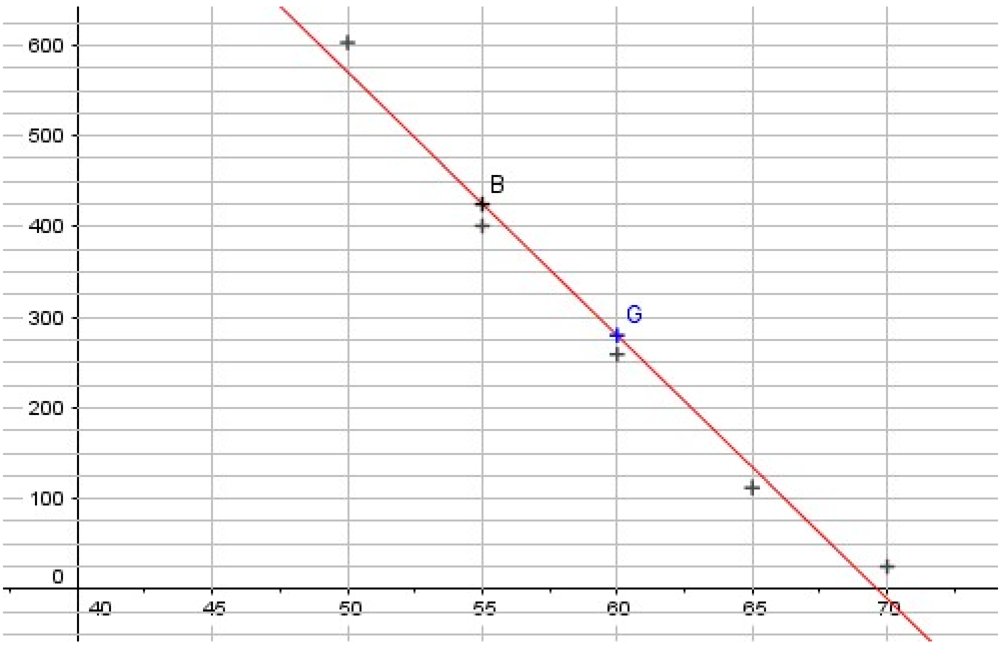
Prix x_i en euros	50	55	60	65	70	Total
Nombre y_i d'acheteurs potentiels	603	401	259	112	25	1400

1. Nuage de points de la série $(x_i ; y_i)$:



Les points de ce nuage sont « presque » alignés donc un ajustement affine semble justifié.

2. Pour l'équation réduite d'une droite passant par le point moyen du nuage et réalisant un ajustement affine, on trace une droite sur le graphique précédent qui passe par le point moyen $G(60;280)$ et qui passe « au plus près » des autres points.



On lit les coordonnées d'un autre point de cette droite : par exemple $B(55;425)$ et on calcule le coefficient directeur : $a=\frac{280-425}{60-55}=-29$.

L'équation réduite est alors de la forme : $y=-29x+b$.

$G(60;280)$ est un point de la droite si, et seulement si $280=-29\times 60+b$; on trouve alors $b=2020$.

L'équation réduite d'une droite réalisant un ajustement affine du nuage est : $y=-29x+2020$.

3. **a)** Algorithme permettant d'obtenir la somme des carrés des résidus obtenue avec un ajustement affine du type $y=ax+b$.

```
Liste Y prend la valeur {603 ; 401 ; 259 ; 112 ; 25}
Saisir a
Saisir b
S prend la valeur 0
x prend la valeur 50
Pour i allant de 1 à 5
    S prend la valeur S+(Y[i]-(ax+b))^2
    x prend la valeur x+5
Fin de Pour
Afficher S
```

b) On fait fonctionner l'algorithme ci-dessus avec $a=-29$ et $b=2020$. On obtient alors :

Valeur de i	Valeur de S	Valeur de x
	0	50
1	$0+\left(603-(-29\times 50+2020)\right)^2=1089$	$50+5=55$
2	$1089+\left(401-(-29\times 55+2020)\right)^2=1665$	$55+5=60$
3	$1665+\left(259-(-29\times 60+2020)\right)^2=2106$	65
4	2635	70
5	3860	75

L'algorithme affiche alors 3860 ; l'ajustement peut donc être considéré comme « bon ».

Remarque : La droite minimisant la somme des résidus est la droite d'équation $y=-28,9x+2014$; la somme des résidus vaut alors 3857,5.

4. Si $x=63$ alors $y=-29\times 63+2020=193$ ce qui signifie que l'on peut estimer qu'il y aura 193 acheteurs pour un prix de 63 euros.

5. Le nombre d'acheteurs potentiels passe 603 à 25 lorsque le prix passe de 50 à 70 donc le taux d'évolution est : $\frac{25-603}{603}\approx -0,9585$ soit une baisse de 95,85%.

6. On note t le taux moyen de diminution par tranche de 5 euros entre le nombre d'acheteurs potentiel pour un prix de 50 euros et celui pour un prix de 70 euros.

Le coefficient multiplicateur correspondant à une diminution de taux t est $CM=1+t$ (avec $t<0$) ; celui qui correspond à 4 diminutions successives et identiques est $CM_{global}=(1+t)^4$.

D'après la question précédente, $CM_{global}=1-0,9585=0,0415$ donc on a :

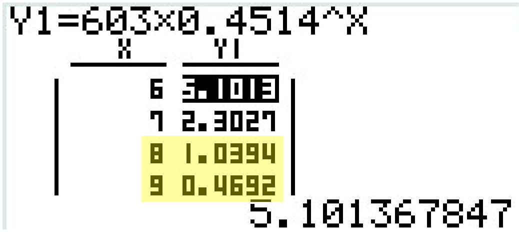
$(1+t)^4=0,0415 \Leftrightarrow (1+t)^2=\sqrt{0,0415} \Leftrightarrow 1+t=\sqrt{\sqrt{0,0415}}$ puisque $1+t\geqslant 0$ soit $t\approx -0,5486$

Le nombre d'acheteurs potentiels passe de 603 à 25 après quatre diminutions successives et identiques de 54,86%.

Remarque : $\sqrt{\sqrt{0,0415}}$ se note aussi $0,0415^{\frac{1}{4}}$.

7. Dans cette question, on considère que les prix sont tous des multiples de 5 et on s'intéresse au prix à partir duquel le nombre d'acheteurs potentiels est nul.

a) Si on considère que le nombre d'acheteurs potentiels diminue de 54,86% à chaque fois que le prix augmente de 5 euros, on cherche le premier entier n tel que $603\times 0,4514^n < 1$ pour trouver le nombre minimum de diminutions successives qui fait tomber le nombre de clients en dessous de 1.



Grâce à la fonction table de la calculatrice on obtient que pour $n=8$, le nombre de clients est encore supérieur à 1 et que pour $n=9$ il est strictement inférieur à 1. Comme la suite des puissances de 0,4514 est décroissante, on peut affirmer que le nombre de clients potentiels est nul à partir de la 9$^{\text{ième}}$ diminution successive ce qui correspond à un prix de $x=50+9\times 5=95$ euros.

b) Si on considère que $y=-29x+2020$ alors $y<1 \Leftrightarrow -29x+2020<1 \Leftrightarrow x\geq 70$
Dans ce modèle, le nombre de clients potentiels est nul dès que le prix dépasse 70 euros.

c) Les résultats obtenus par les deux méthodes sont assez différents ; il faut dire que les diminutions successives ne sont pas très identiques : -33,49% pour la première ; -35,41% pour le deuxième et -56,76% puis -77,67% pour les deux dernières…ce qui laisse penser que le modèle choisi en 6. est mal adapté.

8.

a) En France, pour les artistes dont le chiffre d'affaires est semblable à celui étudié dans les questions précédentes, on estime à $p=0,41$ la probabilité qu'un acheteur interrogé au hasard soit prêt à acheter un article pour un prix de 50 euros.
Comme $1400 \geqslant 25$ et $0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$$I=\left[0,41-\frac{1}{\sqrt{1400}};0,41+\frac{1}{\sqrt{1400}}\right] \text{ soit } I=\left[0,383;0,437\right]$$

603 acheteurs de Monsieur Hart parmi les 1400 achètent un article à 50€ donc la fréquence de cet événement sur cet échantillon est $f=\dfrac{603}{1400}\approx 0,431$

$f\in I$ donc on ne peut pas considérer que les acheteurs de Monsieur Hart dépensent moins que dans les autres régions.

b) On choisit au hasard deux acheteurs parmi ceux interrogés par Monsieur Hart (ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise).

D'après la question précédente, la probabilité qu'un acheteur de Monsieur Hart achète un article à 50€ est $0,431$ donc la probabilité qu'il n'achète pas un article à 50€est 0,569.

La probabilité que les deux acheteurs choisis n'achètent pas un article à 50€ est donc $0,569^2$ et la probabilité de l'événement contraire, c'est-à-dire la probabilité qu'au moins un de ces acheteurs soit prêt à acheter un modèle à 50 euros est $1-0,569^2\approx 0,676$.

9. Monsieur Hart décide de limiter son prix de vente à 70 euros.
Le nombre d'acheteurs potentiels correspondant à un prix de x euros $(0\leqslant x\leqslant 70)$ est donné par $n(x)=(75-x)^2$ donc la recette générée par la vente de la création est :

$$x\times n(x)=x(75-x)^2=x\left(5625-150x+x^2\right)=5625x-150x^2+x^3$$

Notons $f(x)=x^3-150x^2+5625x$ la fonction donnant la recette $x\in[0;70]$ et étudions cette fonction :
f est dérivable sur $[0;70]$ et pour tout $x\in[0;70]$, $f'(x)=3x^2-300x+5625=3\left(x^2-100x+1875\right)$

$f'(x)$ est donc du signe du polynôme $x^2-100x+1875$.

Etudions le signe de $x^2 - 100x + 1875$:

$\Delta = 2500$, $\Delta > 0$ donc le polynôme a deux racines : $x_1 = \dfrac{100-50}{2} = 25$ et $x_1 = \dfrac{100+50}{2} = 75$

Enfin, $a > 0$ d'où le tableau signe :

x	$-\infty$		25		75		$+\infty$
Signe de $x^2 - 100x + 1875$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et le tableau de variations de la fonction *f* sur l'intervalle $[0;70]$:

x	0		25		70
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de *f*	0	$\nearrow$	$40\,000$	$\searrow$	1750

D'après son tableau de variations, la fonction *f* atteint son maximum en $x = 25$ et ce maximum vaut 40 000.
Par conséquent, si Monsieur Hart décide de limiter son prix de vente à 70 euros, il devra vendre sa création 25€ ; cette recette s'élèvera alors à 40 000€.