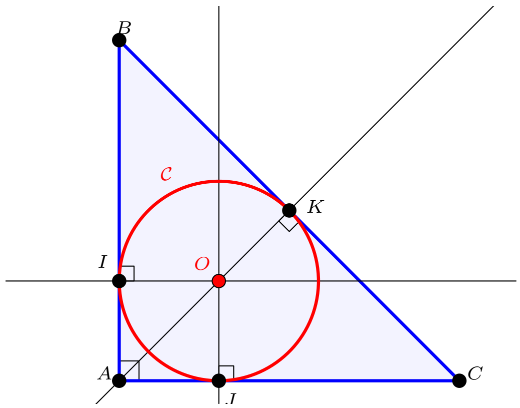
Éléments de correction
On en connait un rayon

- **Situation 1**



1. On calcule d'abord la longueur de la hauteur issue de A. On note K le pied de cette hauteur. On trouve par Pythagore $AO = 2\sqrt{2}$, puis

$$AK = AO + OK = 2 + 2\sqrt{2}.$$

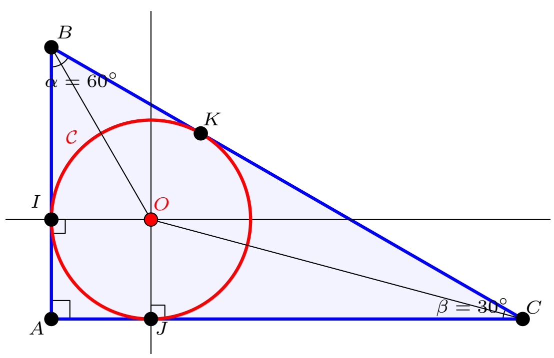
On obtient alors la longueur de l'hypoténuse, en utilisant que le triangle est isocèle et rectangle en A :

$$BC = 2BK = 2AK = 4 + 4\sqrt{2}.$$

2. En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AKB rectangle et isocèle en K, on obtient $AB = 4 + 2\sqrt{2}$. Le périmètre $\mathcal{P}$ de ABC est donc

$$\mathcal{P} = BC + 2AB = 12 + 8\sqrt{2}.$$

- **Situation 2**



On note tout d'abord que $AJOI$ est un carré, donc $AI = IO = 2cm$.
La droite (BO) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC} = 60°$, d'où $\widehat{AB0} = 30°$. On en déduit dans le triangle BOI rectangle en I :

$$\tan(30) = \frac{IO}{BI} \quad \Rightarrow \quad BI = \frac{IO}{\tan(30)} = \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}.$$

On en déduit que $AB = AI + IB = 2 + 2\sqrt{3}$.
On obtient toujours par trigonométrie dans le triangle ABC rectangle en A :

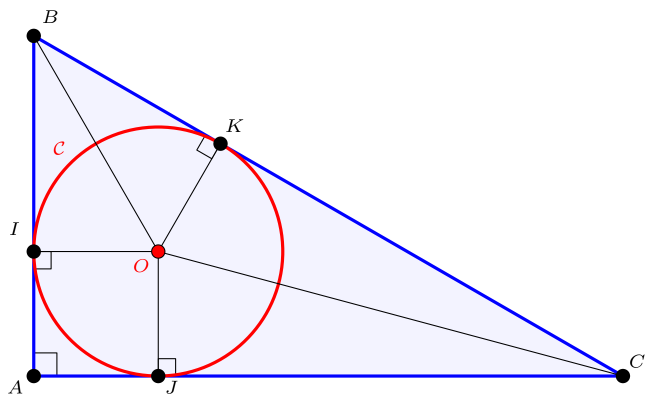
$$\tan(60) = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AC = AB\tan(60) = (2 + 2\sqrt{3}) \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 6,$$

$$\cos(60) = \frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{AB}{\cos(60)} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 4 + 4\sqrt{3}.$$

On en déduit le périmètre de ABC :

$$\mathcal{P} = AB + AC + BC = 12 + 8\sqrt{3}.$$

- **Situation 3**



1. Puisque $AJOI$ est un carré, on a $AJ = AI = 2cm$.

   Dans la suite, on note x la distance BI, y la distance CJ.

   En utilisant Pythagore pour les triangles BIO et BOK, on en déduit $x = BI = BK$. De même, on a $y = CJ = CK$. De plus, puisque l'hypoténuse mesure $13cm$, on a

   $$x + y = BK + CK = 13.$$

   On en déduit le périmètre de ABC :

   $$\mathcal{P} = AB+AC+BC = (2+x)+(2+y)+13 = 17+(x+y) = 30.$$

2. On a $AB = 2 + x$ et $AC = 2 + y$. D'après Pythagore appliqué au triangle ABC, on a :

   $$13^2 = (2 + x)^2 + (2 + y)^2 = 8 + 4(x + y) + x^2 + y^2.$$

   Puisque $x + y = 13$, on obtient que x et y sont solution du système :

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + 52 + 8 = 169 \\ x + y = 13 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 109 \\ x + y = 13 \end{cases}.$$

   On obtient en substituant :

   $$x^2 + (x - 13)^2 = 109 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 26x + 60 = 0.$$

   On obtient $x = 3$ ou $x = 10$ en résolvant, et $y = 10$ ou $y = 3$ respectivement. Ainsi on obtient

   $$(AB = 5 \text{ et } AC = 12) \text{ ou } (AB = 12 \text{ et } AC = 5).$$

- **Situation 4**
  Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $AB = 5cm$ et $AC = 12cm$, alors :

  – par Pythagore, $AC = 13cm$;

  – En reprenant la même idée que précédemment : notons r le rayon du cercle inscrit. On a $AB = r + x$, $AC = r + y$, et en remplaçant dans le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABC :

  $$(r + x)^2 + (r + y)^2 = (x + y)^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 + (x + y)r - xy = 0.$$

  D'autre part, on a :

  $$(r + x)(r + y) = r^2 + (x + y)r + xy = 5 \times 12.$$

  Ainsi en sommant ces deux équations, on obtient :

  $$2r^2 + 2(x + y)r - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 13r - 30 = 0.$$

  Les solutions de cette équation sont $r = -15$ et $r = 2$. On obtient bien que le rayon du cercle inscrit est de longueur $r = 2cm$.