Olympiades académiques de mathématiques

Exercices proposés par l'académie de Besançon

Mercredi 15 mars 2017

Les objets calculatrices sont autorisés, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre. Il est également important pour les candidats de bien argumenter leurs affirmations.

Le sujet comprend sept pages.
Les candidats de la série S traiteront les exercices 1 (La gravure) et 2 (On en connait un rayon).
Les candidats des séries autres que la série S traiteront les exercices 1 (La gravure) et 3 (Les créations de Monsieur Hart).
Ces exercices sont indépendants.
Ce sujet comprend deux annexes en pages 6 et 7. **L'annexe 1 est à rendre avec la copie**.

La durée de composition est de deux heures.

Sauf cas de force majeure, aucun candidat n'est autorisé à quitter définitivement la salle de composition moins d'une heure après le début de l'épreuve. Un candidat qui quitterait la salle au bout d'une heure ou moins doit rendre sa copie et son exemplaire du sujet.

Pour les candidats composant individuellement, ils indiqueront, dans l'en-tête de leur copie, leur numéro d'anonymat figurant sur leur convocation, leur filière et l'établissement dans lequel ils sont inscrits.
Pour les candidats composant en groupe, chacun des membres du groupe indiquera dans l'en-tête de la copie son numéro d'anonymat figurant sur sa convocation, sa filière et l'établissement dans lequel il est inscrit.

Exercice 1 La gravure
Commun à tous les candidats

On souhaite graver sur des trophées : « olympiades 2017 ».

Pour effectuer ces gravures à l'identique, on utilise un logiciel permettant de programmer la trajectoire de la pointe du graveur.

On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$. Si x et y désignent respectivement l'abscisse et l'ordonnée de la pointe du graveur dans ce repère, y ne variera pas nécessairement en fonction de x sur un certain intervalle I. On choisit alors de décrire le mouvement de l'abscisse de la pointe par une fonction f et celui de l'ordonnée de la pointe par une fonction g, qui varieront simultanément, mais indépendamment l'une de l'autre, en fonction du temps t.

L'ensemble des points tracés par la pointe du graveur lorsque t décrit un intervalle I est alors appelé **courbe paramétrée** (le paramètre étant le réel t) et on la représente à l'aide d'un **système d'équations paramétriques** :

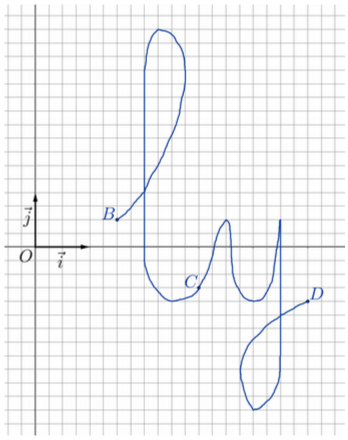
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},\ t \in I.$$

Partie A

Pour décrire le tracé d'une courbe paramétrée, on peut regrouper les variations des fonctions coordonnées f et g sur l'intervalle I dans un seul et même tableau de variations.

Par exemple, le 'l' ci-contre est une courbe paramétrée qui admet le tableau de variations conjointes suivant.

Le tracé commence au point B (instant t_0) et se termine au point C (instant t_6).



t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6
Variations de f	1,5 ↗	2,75 ↘	2,25 ↘	2 →	2 ↗	$f(t_5)$ ↗	3
Variations de g	0,5 ↗	3 ↗	$g(t_2)$ ↘	3,25 ↘	−0,25 ↘	−1 ↗	−0,75

1. Donner les coordonnées de la pointe du graveur aux instants t_1, t_2 et t_5 du tracé de la lettre 'l'.

2. Dresser, de la même façon, le tableau de variations conjointes de la courbe paramétrée correspondant à la lettre 'y' ci-contre. Le tracé commence au point C et se termine au point D.

Partie B - Une autre lettre

Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}\right)$, on considère les courbes paramétrées :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x = f_1(t) = -2,6t^2 + 3,6t + 0,2 \\ y = g_1(t) = 0,2t^2 + 0,8t - 0,4 \end{cases},\ t \in [0\,;1] \qquad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x = f_2(t) = 1,2 - t \\ y = g_2(t) = \dfrac{-t + 0,936}{-1,4t + 1,56} \end{cases},\ t \in [0\,;1]$$

$$\text{et} \quad \mathcal{C}_3 : \begin{cases} x = f_3(t) = 1,4t^2 + 0,2 \\ y = g_3(t) = 1,6t^2 - 2t - 0,4 \end{cases},\ t \in [0\,;1].$$

1. On donne, en **annexe 1**, le tableau des variations conjointes des fonctions coordonnées de la courbe $\mathcal{C}_1$.
   Dresser les tableaux de variations conjointes des fonctions coordonnées des courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Ces tableaux sont fournis en **annexe 1**.

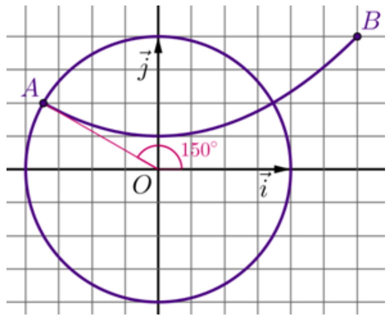
2. Compléter les tableaux de valeurs donnés en **annexe 1**.

3. À chaque valeur du paramètre t correspond un point d'une courbe paramétrée.
Dans le repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$ donné en **annexe 1**, placer les points donnés par les tableaux de valeurs précédents puis, en tenant compte des informations obtenues dans les questions précédentes, tracer avec précision les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.
Quelle est la lettre obtenue ?

Partie C - La lettre 'ℴ'

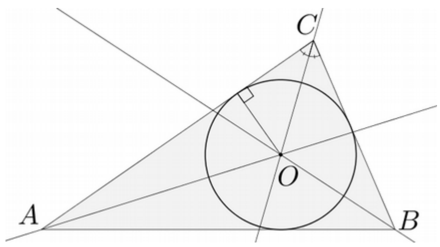
1. Déterminer un système d'équations paramétriques permettant d'obtenir le cercle de centre O et de rayon 1.

2. En déduire un système d'équations paramétriques permettant d'obtenir la lettre 'ℴ' dessinée ci-contre, sachant qu'elle est composée du cercle de centre O et de rayon 1 ainsi que d'un arc de parabole.
Au départ, la pointe du graveur est au point A. À l'arrivée, elle est au point B.



Exercice 2 On en connait un rayon
Candidats de la série S

On rappelle que dans un triangle ABC, les bissectrices des angles se coupent en un unique point O qui est le centre du cercle inscrit. Ce cercle est tangent à chacun des côtés du triangle.



Dans tout cet exercice, on considère un triangle ABC rectangle en A dont le rayon du cercle inscrit est fixé, égal à 2 cm. On cherche à déterminer le périmètre de ce triangle dans les trois situations suivantes.

Les situations suivantes sont indépendantes.

Situation 1 : On suppose dans cette question que le triangle ABC est de plus isocèle en A.

a) Calculer la longueur de l'hypoténuse du triangle.

b) En déduire le périmètre du triangle ABC.

Situation 2 : On suppose dans cette question que la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ au sommet B est égale à 60°. Déterminer le périmètre du triangle ABC dans ce cas.

Situation 3 : On suppose dans cette question que la longueur de l'hypoténuse est de 13 cm.

a) Calculer le périmètre du triangle ABC.

b) Déterminer la longueur des côtés AB et AC.

Situation 4 : Dans cette dernière question, le rayon r du cercle inscrit est inconnu. On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 5$ cm et $AC = 12$ cm. Déterminer r.

Exercice 3 Les créations de Monsieur Hart
Candidats des séries autres que la série S

Monsieur Hart, un artiste, a fait mener une étude visant à déterminer à quel prix ses clients sont prêts à acheter un certain modèle d'une de ses créations. Les résultats sont regroupés dans le tableau suivant (on considère que tous les clients de Monsieur Hart ont répondu à l'enquête) :

Prix x_i en euros	50	55	60	65	70
Nombre y_i d'acheteurs potentiels	603	401	259	112	25

Pour répondre aux questions suivantes, le candidat pourra s'aider de l'**annexe 2**.

1. Représenter le nuage de points de la série $(x_i\ ;\ y_i)$. Un ajustement affine semble-t-il justifié ?

2. Déterminer l'équation réduite d'une droite passant par le point moyen du nuage et réalisant un ajustement affine.

3. **a)** Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour obtenir la somme des carrés des résidus obtenue avec un ajustement affine du type $y = ax + b$.

Initialisation :	Liste Y prend la valeur $\{603; 401; 259; 112; 25\}$
Traitement :	Saisir a
	Saisir b
	S prend la valeur ...
	x prend la valeur ...
	Pour i allant de 1 à ... :
	| S prend la valeur ...
	| x prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher ...

b) Pour les valeurs étudiées, un ajustement est considéré comme « bon » si la somme des carrés des résidus est inférieure à 30 000. Que pensez-vous de l'ajustement réalisé à la question **2.** ?

4. En utilisant l'ajustement affine établi à la question **2.**, estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un prix de 63 euros.

5. Quel est le pourcentage de diminution entre le nombre d'acheteurs potentiels pour un prix de 50 euros et celui pour un prix de 70 euros (arrondir à $0,01\ \%$) ?

6. On note t le taux moyen de diminution par tranche de 5 euros entre le nombre d'acheteurs potentiel pour un prix de 50 euros et celui pour un prix de 70 euros. Déterminer la valeur de t pour qu'après quatre diminutions successives et identiques, le nombre d'acheteurs potentiels passe de 603 à 25 (arrondir à $0,01\ \%$).

7. Dans cette question, on considère que les prix sont tous des multiples de 5 et on s'intéresse au prix à partir duquel le nombre d'acheteurs potentiels est nul.

a) En utilisant le résultat de la question **6.** et le nombre d'acheteurs potentiels pour un prix de 50 euros, écrire une inéquation pour répondre au problème posé et résoudre cette inéquation (détailler la démarche utilisée).

b) Reprendre la question précédente en utilisant l'ajustement affine de la question **2.**

c) Comparer les deux méthodes.

8. En France, pour les artistes dont le chiffre d'affaires est semblable à celui étudié dans les questions précédentes, on estime à 0,41 la probabilité qu'un acheteur interrogé au hasard soit prêt à acheter un article pour un prix de 50 euros.

a) Monsieur Hart considère que ses acheteurs ont tendance à moins dépenser que dans les autres régions. Qu'en pensez-vous ?

b) On choisit au hasard deux acheteurs parmi ceux interrogés par Monsieur Hart (ce tirage peut être assimilé à un tirage avec remise). Quelle est la probabilité qu'au moins un de ces acheteurs soit prêt à acheter un modèle à 50 euros.

9. Monsieur Hart décide de limiter son prix de vente à 70 euros. On considère dans cette question que le nombre d'acheteurs potentiels correspondant à un prix de x euros ($0 \leqslant x \leqslant 70$) est donné par $n(x) = (75 - x)^2$. À combien Monsieur Hart doit-il fixer le prix de vente d'une de ses créations pour que la recette soit maximale et quelle est cette recette ?

Annexe 1 (à rendre avec la copie)

Partie B - Question 1.

t	0		$\frac{9}{13}$		1
Variations de f_1	$\frac{1}{5}$	$\nearrow$	$\frac{94}{65}$	$\searrow$	$\frac{6}{5}$
Variations de g_1	$-\frac{2}{5}$	$\nearrow$	$\frac{211}{845}$	$\nearrow$	$\frac{3}{5}$

t	0	1
Variations de f_2		
Variations de g_2		

t	0	1
Variations de f_3		
Variations de g_3		

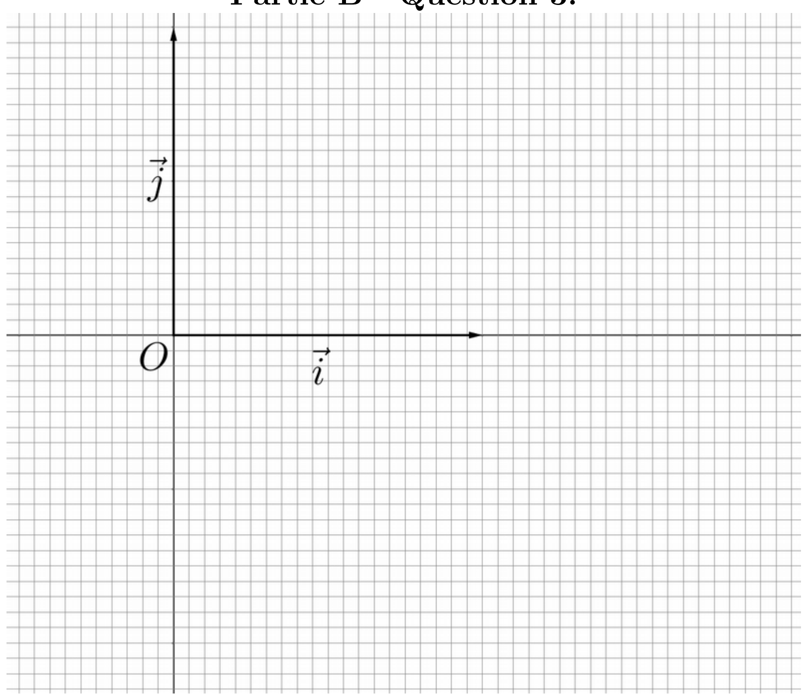
Partie B - Question 2.

t	0	$0,1$	$0,5$	$0,8$	1
$x = f_1(t) = -2,6t^2 + 3,6t + 0,2$	$0,2$	$0,534$			
$y = g_1(t) = 0,2t^2 + 0,8t - 0,4$	$-0,4$	$-0,318$			

t	0	$0,1$	$0,5$	$0,8$	1
$x = f_2(t)$					
$y = g_2(t)$					

t	0	$0,1$	$0,5$	$0,8$	1
$x = f_3(t)$					
$y = g_3(t$					

Partie B - Question 3.



Annexe 2

Soient X et Y deux variables statistiques numériques observées sur une population d'effectif n.
À chaque individu de cette population, on associe ainsi un couple $(x_i\ ;\ y_i)$ où x_i est la $i^{\text{ème}}$ valeur de la première variable et y_i la $i^{\text{ème}}$ valeur de la seconde.
L'ensemble de ces couples forme une **série statistique à deux variables** représentée par le **nuage de points** $M_i(x_i\ ;\ y_i)$.
On définit le **point moyen** du nuage comme le point G de coordonnées $(\overline{x}\ ;\ \overline{y})$ où $\overline{x}$ est la moyenne des nombres x_i et $\overline{y}$ la moyenne des nombres y_i.

On considère deux séries statistiques X et Y telles que dans un repère orthogonal, le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ présente un certain alignement.
On dit qu'on réalise un **ajustement affine** lorsqu'on recherche une droite $\mathscr{D}$ d'équation réduite $y = ax + b$ qui passe le plus près possible des points du nuage. Pour chaque abscisse x_i, on calcule la distance M_iP_i entre le point du nuage et le point de la droite. On recherche alors les réels a et b pour lesquels la somme S, des carrés de ces distances (appelée **somme des carrés des résidus**), soit $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \ldots + M_nP_n^2$, est minimale.