Exercice 1

Partie I : Obtention des diviseurs d'un entier

1. $350 = 2 \times 5^2 \times 7$ donc les diviseurs de 350 sont : $1\,;\,2\,;\,5\,;\,7\,;\,10\,;\,14\,;\,25\,;\,35\,;\,50\,;\,70\,;\,175\,;\,350$.
   On a donc : $\sigma(350) = 1 + 2 + 5 + 7 + 10 + 14 + 25 + 35 + 50 + 70 + 175 + 350 = 744$.
2. L'algorithme complet est le suivant :

Entrée	:	n entier naturel non nul
Initialisation	:	σ prend la valeur 0
Traitement	:	Pour k allant de 1 à n faire :
		| Si $n/k == floor(n/k)$, alors :
		| | Affecter à σ la valeur $\sigma + k$
		| Fin Si
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher σ

Partie II : Quelques propriétés de σ

1. $\sigma(1) = 1\,;\ \sigma(2) = 1 + 2 = 3\,;\ \sigma(3) = 1 + 3 = 4\,;\ \sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7\,;\ \sigma(5) = 1 + 5 = 6$ et $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
2. Si p est un nombre premier, alors ses seuls diviseurs sont 1 et p (avec $p \neq 1$) donc $\sigma(p) = p+1$.
3. a) Si $n \geqslant 2$, alors n est au moins divisible par 1 et par lui-même (avec $n \neq 1$).
   D'où $\sigma(n) \geqslant n + 1$.

   b) Soit n un entier naturel non nul. n est au plus divisible par tous les entiers naturels non nuls qui le précèdent. On a donc :

$$\sigma(n) \leqslant 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

$$\sigma(n) \leqslant \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 1}$$

Partie III : Nombres parfaits

1. Si n est un entier naturel parfait, alors $n = \sigma(n) - n$, c'est-à-dire $\sigma(n) = 2n$.
2. On a vu à la question **II 2.** que si p est un nombre premier, alors $\sigma(p) = p+1$. Or, l'équation $p + 1 = 2p$ a pour solution $p = 1$ qui n'est pas un nombre premier.
   Il n'existe donc pas de nombre premier parfait.
3. a) D'après la question précédente, il suffit de traiter les cas $n = 1$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$, $n = 9$ et $n = 10$.

$\sigma(1) = 1 \neq 2 \times 1$	$\sigma(8) = 15 \neq 2 \times 8$
$\sigma(4) = 7 \neq 2 \times 4$	$\sigma(9) = 13 \neq 2 \times 9$
$\sigma(6) = 12 = 2 \times 6$	$\sigma(10) = 18 \neq 2 \times 10$

   Le seul nombre parfait inférieur ou égal à 10 est donc 6.

   b) Avec $n = 2$ on peut écrire $28 = 2^2\left(2^{2+1} - 1\right)$ avec $2^{2+1} - 1 = 7$ nombre premier.

   c) $6 = 2^1\left(2^{1+1} - 1\right)$ avec $2^{1+1} - 1 = 3$ nombre premier.
4. a) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier.
   Les diviseurs de $2^n p$ sont : $1\,;\,2\,;\,2^2\,;\,\ldots\,;\,2^n\,;\,p\,;\,2p\,;\,2^2p\,;\,\ldots\,;\,2^n p$.

On a donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(2^n p) &= 1+2+2^2+\ldots+2^n+p+2p+2^2p\ldots+2^np \\
&= (1+2+2^2+\ldots+2^n)+p(1+2+2^2+\ldots+2^n) \\
&= (1+p)(1+2+2^2+\ldots+2^n) \\
&= (1+p)\frac{2^{n+1}-1}{2-1} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 2} \\
\sigma(2^n p) &= (1+p)\left(2^{n+1}-1\right)
\end{aligned}$$

b) Avec $p = 2^{n+1}-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sigma\left(2^n\left(2^{n+1}-1\right)\right) &= \left(1+2^{n+1}-1\right)\left(2^{n+1}-1\right) \\
&= 2^{n+1}\left(2^{n+1}-1\right) \\
&= 2\times 2^n\left(2^{n+1}-1\right)
\end{aligned}$$

Donc $2^n\left(2^{n+1}-1\right)$ est parfait.

c) Si 2^np est parfait, alors :

$$\begin{aligned}
\sigma(2^np) = 2\times 2^np &\iff (1+p)\left(2^{n+1}-1\right) = 2^{n+1}p \\
&\iff 2^{n+1}-1+\left(2^{n+1}-1\right)p = 2^{n+1}p \\
&\iff p = 2^{n+1}-1
\end{aligned}$$

d) On peut, par exemple, pendre $n=4$ et obtenir le nombre parfait $2^4\left(2^{4+1}-1\right) = 16\times 31 = 496$ (31 est bien un nombre premier) ou encore $n=6$ et obtenir le nombre parfait $2^6\left(2^{6+1}-1\right) = 64\times 127 = 8\,128$ (127 est encore un nombre premier).

5. a) Parmi les valeurs déjà calculées, on trouve que :
1 est presque parfait car $\sigma(1) = 1 = 2\times 1-1$;
2 est presque parfait car $\sigma(2) = 3 = 2\times 2-1$;
4 est presque parfait car $\sigma(4) = 7 = 2\times 4-1$;
8 est presque parfait car $\sigma(8) = 15 = 2\times 8-1$.
Pour les entiers de 11 à 16, seul 16 est presque parfait car $\sigma(16) = 31 = 2\times 16-1$.

b) On peut conjecturer que tous les nombres presque parfaits sont des puissances de 2.

c) On démontre un sens de cette affirmation :
Soit k un entier naturel. Les diviseurs de 2^k sont : 1 ; 2 ; 2^2 ; … ; 2^k.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(2^k) &= 1+2+2^2+\ldots+2^k \\
&= \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \qquad \text{d'après la } \textbf{propriété 2} \\
&= 2^{k+1}-1 \\
\sigma(2^k) &= 2\times 2^k-1
\end{aligned}$$

ce qui démontre que toutes les puissances de 2 sont des nombres presque parfaits.

Exercice 2

Partie I : Cas où il n'y a que deux figurines distinctes

1. Il faut acheter au moins deux boîtes pour espérer avoir deux figurines.
2. P(« Obtenir deux figurines distinctes en achetant deux boîtes ») $= \dfrac{1}{2}$.
3. $\mathrm{P}(C_3) = \mathrm{P}(\text{fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_2) + \mathrm{P}(\text{fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_1) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{4}$.
4. $\mathrm{P}(C_4) = \mathrm{P}(\text{fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_1\text{–fig}_2) + \mathrm{P}(\text{fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_2\text{–fig}_1) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{8}$.
5. a) $\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{fig}_1\text{–fig}_1\ldots\text{–fig}_1}_{n \text{ fois}}\right) + \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{fig}_2\text{–fig}_2\ldots\text{–fig}_2}_{n \text{ fois}}\right) = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   b) $\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}\left(\overline{E}\right) = 1 - \mathrm{P}(E) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   c)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(F) > 0,999 &\iff 1 - \frac{1}{2^{n-1}} > 0,999 \\ &\iff n \geqslant 11\end{aligned}$$

Partie II : Cas général

A. Une première approche

1. D'après le tableau, le nombre moyen de boîtes nécessaires pour obtenir la collection complète appartient à l'intervalle $]29\,;30]$ lorsque $s = 10$.
2. D'après le tableau, les médianes sont inférieures ou égales à 35 jusqu'à $s = 12$.
3. D'après le tableau, les neuvièmes déciles sont inférieurs ou égaux à 50 jusqu'à $s = 11$.
4. D'après le tableau, les premiers déciles sont strictement supérieurs à 16 à partir de $s = 10$.

B. Coût de la collection complète

1. $11 \times 8,90 = 97,90$ €.
2. $97,90 = 39 \times 2,50 + 0,40$ donc Timéo peut acheter 39 boîtes de biscuits avec cet argent. Or, d'après le tableau, avec $s = 11$, on a $Q_3 = 39$. On peut donc estimer la probabilité que Timéo obtienne la collection complète avec ses 39 boîtes à $0,75$.
3. D'après le tableau, si l'on veut que cette probabilité soit de $0,9$, il faut qu'il puisse acheter 49 boîtes ($D_9 = 49$). Il faudrait donc fixer le prix unitaire de la boîte de biscuits à $\dfrac{97,90}{49} \approx 2,00$ €.

C. Quelques résultats théoriques

1. Il faut acheter au moins onze boîtes pour espérer avoir onze figurines.
2. a) $q_n = 11 \times \mathrm{P}\left(\underbrace{\text{fig}_1\text{–fig}_1\ldots\text{–fig}_1}_{n \text{ fois}}\right) = 11 \times \left(\dfrac{1}{11}\right)^n = \dfrac{1}{11^{n-1}}$.

   b) $q_n \leqslant 10^{-6} \iff n \geqslant 7$.
3. a) D'après le tableau, avec $s = 11$, au moins 10 % des simulations ont nécessité jusqu'à 20 boîtes donc $p_{11} < 0,1$.

b) Il y a 11 figurines possibles à chacune des 11 répétitions identiques et indépendantes du tirage soit $\underbrace{11 \times 11 \times \ldots \times 11}_{n \text{ fois}} = 11^{11}$ façons différentes d'obtenir une suite de 11 figurines non nécessairement distinctes.

c) Il y a 11 figurines non encore obtenues à l'ouverture de la première boîte, 10 à l'ouverture de la deuxième, 9 à l'ouverture de la troisième, *etc.*
On a donc $11 \times 10 \times 9 \times \ldots \times 1 = 39\,916\,800$ façons différentes d'obtenir les 11 figurines distinctes.

d) On en déduit que $p_{11} = \dfrac{39\,916\,800}{11^{11}} \approx 1,4 \times 10^{-4}$.