Olympiades académiques de mathématiques 2013 Académie de Besançon

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comprend sept pages. Il est composé de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre que vous aurez choisi.

Deux de ces exercices sont des sujets nationaux, les deux autres sont des sujets académiques.

Recommandations :
Il est important que vous argumentiez vos affirmations. De plus, même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire vos initiatives, votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Corrigés :
Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à l'adresse *http ://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques*

EXERCICE 1 Les nombres Harshad *(national)*

Un entier naturel non nul est un **nombre Harshad** s'il est divisible par la somme de ses chiffres. Par exemple, $n = 24$ est un nombre Harshad car la somme de ses chiffres est $2 + 4 = 6$, et 24 est bien divisible par 6.

1. a) Montrer que 364 est un nombre Harshad.

   b) Quel est le plus petit entier qui ne soit pas un nombre Harshad ?

2. a) Donner un nombre Harshad de quatre chiffres.

   b) Soit n un entier non nul. Donner un nombre Harshad de n chiffres.

3. a) Montrer que 110, 111, 112 forment une liste de trois nombres Harshad consécutifs.

   b) En insérant judicieusement le chiffre 0 dans l'écriture décimale des nombres précédents, construire une autre liste de trois nombres Harshad consécutifs.

   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de trois nombres Harshad consécutifs.

4. a) Soit $A = 30 \times 31 \times 32 \times 33$. Calculer la somme des chiffres de A.

   b) En déduire que 98 208 030, 98 208 031, 98 208 032 et 98 208 033 forment une liste de quatre nombres Harshad consécutifs.

   c) Justifier l'existence d'une infinité de listes de quatre nombres Harshad consécutifs.

5. a) En s'inspirant de la question 4, trouver une liste de cinq nombres Harshad consécutifs.

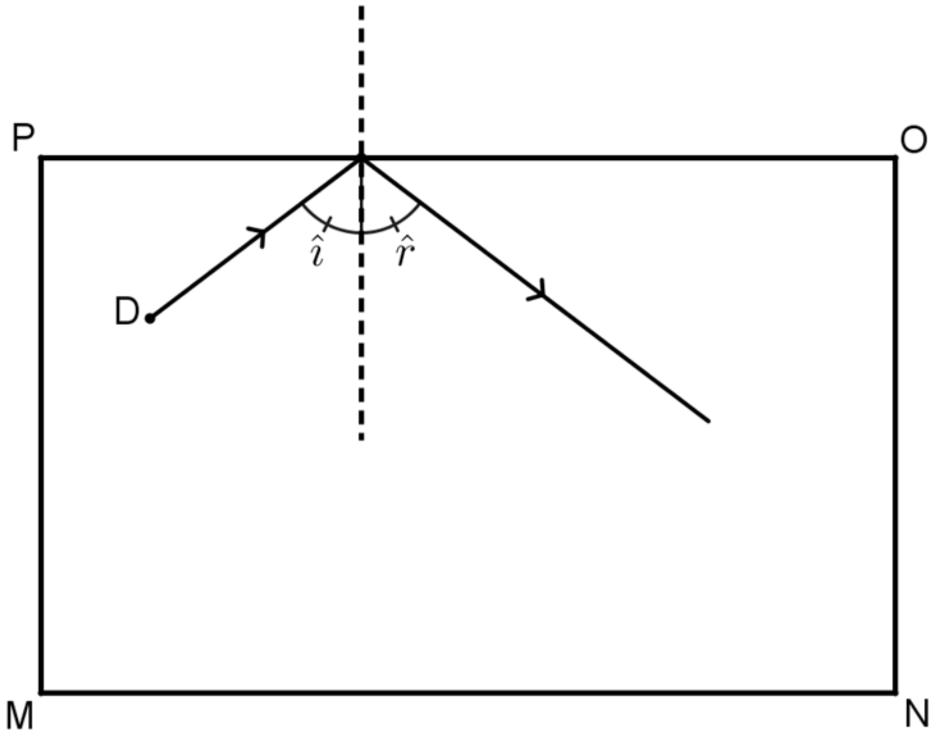
   b) Justifier l'existence d'une infinité de listes de cinq nombres Harshad consécutifs.

6. a) Soit i un chiffre compris entre 0 et 8.
   Soit p un entier dont le chiffre des dizaines est i et le chiffre des unités est 9.
   Montrer que soit la somme des chiffres du nombre p soit celle de $p + 2$ est un nombre pair.
   En déduire que p et $p + 2$ ne peuvent pas être tous les deux des nombres Harshad.

   b) Existe-t-il une liste de 22 nombres Harshad consécutifs ?

Exercice 2 **Le billard rectangulaire** *(national)*

On considère un billard de forme rectangulaire, de longueur 300 cm et de largeur 160 cm dont les boules sont assimilées à des points.
Entre deux rebonds toutes les trajectoires sont rectilignes.
Lorsque la boule atteint l'un des bords (rails) du billard, elle y rebondit suivant les règles de la physique des chocs élastiques : l'angle d'incidence $\hat{\imath}$ étant égal à l'angle de réflexion $\hat{r}$, comme sur la figure ci-dessous ($\hat{\imath} = \hat{r}$).



1. On frappe une boule placée au milieu du rail $[MN]$.
   a) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne le point N en une bande (c'est-à-dire avec un seul rebond) ?
   b) Quel point du rail $[PO]$ peut-on viser pour que la boule atteigne en une bande le milieu du rail $[NO]$?
   c) Quel point du rail $[NO]$ peut-on viser pour que la boule revienne à son point de départ en trois bandes (c'est-à-dire après exactement trois rebonds) ?
2. On frappe une boule placée en un point quelconque du rail $[MN]$.
   a) Est-il possible d'atteindre en une bande n'importe quelle boule placée sur la surface de jeu ?
   b) Est-il toujours possible de la frapper de sorte qu'elle revienne en trois bandes à son point initial ?

Exercice 3 *(académique)*

On définit la fonction σ sur l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls, qui à n associe la somme de ses diviseurs.

Exemple : $\sigma(21) = 32$ car les diviseurs de 21 sont 1 ; 3 ; 7 ; 21 et $1 + 3 + 7 + 21 = 32$.

Définition : Un entier naturel p est dit *premier* s'il admet deux diviseurs distincts : 1 et p.

Théorème 1 (*Décomposition en facteurs premiers*)

> *Tout nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 peut s'écrire comme un produit de nombres premiers (non nécessairement distincts).*

Exemple : $72 = 2^3 \times 3^2$.

On rappelle également les deux propriétés suivantes :

Propriété 1

> *Pour tout entier naturel non nul n,*
>
> $$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété 2

> *Pour tout nombre réel $x \neq 1$ et pour tout entier naturel n,*
>
> $$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

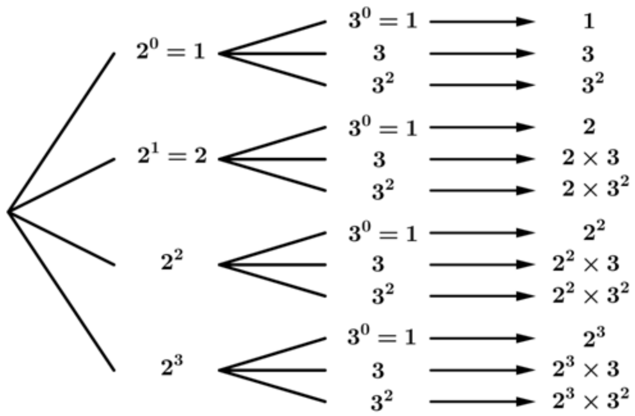
Partie I : Obtention des diviseurs d'un nombre entier naturel

La décomposition en facteurs premiers d'un entier naturel permet d'obtenir tous ses diviseurs de manière systématique.

On a vu par exemple que $72 = 2^3 \times 3^2$. Les diviseurs de 72 sont alors :

$$1 \ ; \ 2 \ ; \ 2^2 \ ; \ 2^3 \ ; \ 3 \ ; \ 3^2 \ ; \ 2 \times 3 \ ; \ 2^2 \times 3 \ ; \ 2^3 \times 3 \ ; \ 2 \times 3^2 \ ; \ 2^2 \times 3^2 \ ; \ 2^3 \times 3^2.$$

On peut s'aider d'un arbre pour lister ces diviseurs :



1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 350 et en déduire la liste de ses diviseurs. Calculer $\sigma(350)$.
2. On considère l'algorithme incomplet suivant dont le rôle est de calculer $\sigma(n)$ connaissant n :

Entrée	:	n entier naturel non nul
Initialisation	:	σ prend la valeur 0
Traitement	:	Pour k allant de … à … faire :
		| Si le reste de la division euclidienne de n par k est 0, alors :
		| | Affecter à σ la valeur …
		| Fin Si
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher σ

Recopier et compléter cet algorithme en remplaçant la condition « le reste dans la division euclidienne de n par k est 0 » par une instruction mathématique.

Partie II : Quelques propriétés de σ

1. Déterminer $\sigma(n)$ pour $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ et $n = 6$.
2. Si p est un nombre premier, que vaut $\sigma(p)$?
3. a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $\sigma(n) \geqslant n + 1$.

   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\sigma(n) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie III : Nombres parfaits

Définition : Un entier naturel non nul n est dit *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

Exemple : 28 est un nombre parfait car les diviseurs de 28, différents de 28, sont 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 et on a :

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

1. Justifier que si n est un entier naturel parfait, alors $\sigma(n) = 2n$.
2. Existe-t-il des nombres premiers parfaits ?
3. a) Déterminer tous les nombres parfaits inférieurs ou égaux à 10.

   b) Vérifier que l'on peut trouver un entier naturel non nul n tel que :
   - $28 = 2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$
   - $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier.

   c) Montrer que les autres nombres parfaits trouvés s'écrivent aussi sous la forme $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$, où n un entier naturel non nul et $2^{n+1} - 1$ un nombre premier.
4. Nous allons démontrer que pour tout entier naturel non nul n tel que $2^{n+1} - 1$ est un nombre premier, le nombre $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ est parfait.

   a) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier différent de 2.
   Lister les diviseurs de $2^n p$ et calculer leur somme en fonction de n et p.

   b) Soit n un entier naturel non nul tel que $2^{n+1} - 1$ soit un nombre premier.
   Exprimer $\sigma\left(2^n\left(2^{n+1} - 1\right)\right)$ en fonction de n et en déduire que $2^n\left(2^{n+1} - 1\right)$ est parfait.

   c) Soit n un entier naturel non nul et soit p un nombre premier différent de 2.
   Démontrer que si le nombre $2^n p$ est parfait, alors $p = 2^{n+1} - 1$.

   d) Donner un nombre parfait différent de ceux déjà cités.
5. Un entier naturel non nul n est dit *presque parfait* si $\sigma(n) = 2n - 1$.

   a) Déterminer tous les nombres presque parfaits inférieurs ou égaux à 16.

   b) Quelle conjecture peut-on faire sur les nombres presque parfaits ?

   c) Démontrer que si k est un entier naturel, alors 2^k est un nombre presque parfait.

Exercice 4 La collection *(académique)*

Lors du lancement d'un nouveau biscuit, une figurine est insérée dans l'emballage de chacune des boîtes. La collection est composée de plusieurs figurines distinctes et on admet que celles-ci sont réparties au hasard dans les boîtes, dans les mêmes proportions.
L'objectif de cet exercice est de donner des pistes de réponse à la question suivante :
« Combien Timéo doit-il acheter de boîtes de biscuits pour obtenir la collection complète de figurines, sans faire aucun échange ? »

Partie I : Cas où il n'y a que deux figurines distinctes
Dans toute la partie I, on considère que la collection est composée de seulement deux figurines. Timéo achète les boîtes de biscuits les unes après les autres et extrait les figurines après chaque achat.

1. Quel nombre minimum de boîtes de biscuits Timéo devra-t-il acheter pour espérer avoir toutes les figurines dans sa collection ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir deux figurines distinctes en achetant deux boîtes de biscuits seulement ?
3. On note C_3 l'événement : « La collection de Timéo est complète après l'achat de trois boîtes de biscuits, mais pas après l'achat de deux boîtes. »
   Déterminer la probabilité de l'événement C_3. On pourra éventuellement s'aider d'un arbre.
4. On note C_4 l'événement : « La collection de Timéo est complète après l'achat de quatre boîtes de biscuits, mais pas après l'achat de trois boîtes. »
   Déterminer la probabilité de l'événement C_4. On pourra éventuellement s'aider d'un arbre.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'événement E : « Après l'achat de n boîtes de biscuits, Timéo ne possède qu'une seule figurine sur les deux, en n exemplaires. »
   a) Justifier que $\mathrm{P}(E) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
   b) En déduire la probabilité de l'événement F : « Timéo possède les deux figurines en ayant acheté n boîtes de biscuits ou moins de n boîtes de biscuits. »
   c) À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n supérieur ou égal à 2 tel que $\mathrm{P}(F) > 0,999$.

Partie II : Cas général
On suppose maintenant qu'il y a s figurines à collectionner où s est un entier supérieur ou égal à 2.
Pour différentes valeurs du nombre s, on a simulé 100 000 fois l'expérience aléatoire qui consiste à acheter successivement des boîtes de biscuits et à s'arrêter dès que la collection complète des s figurines est obtenue. Pour les 100 000 expériences simulées, on comptabilise le nombre de boîtes nécessaires pour réunir la collection complète et on détermine la moyenne, le premier décile, le premier quartile, la médiane, le troisième quartile et le neuvième décile de la série statistique des 100 000 valeurs ainsi obtenue.

On rappelle que :
- le premier décile d'une série statistique est la plus petite valeur D_1 de cette série telle qu'au moins 10 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_1.
- le neuvième décile d'une série statistique est la plus petite valeur D_9 de cette série telle qu'au moins 90 % des valeurs de la série sont inférieures ou égales à D_9.

On a consigné les résultats dans le tableau ci-dessous :

Nombre s de figurines à collectionner	**Moyenne**	**Premier décile**	**Premier quartile**	**Médiane**	**Troisième quartile**	**Neuvième décile**
2	$3,0$	2	2	2	3	5
3	$5,5$	3	4	5	7	9
4	$8,3$	5	6	7	10	13
5	$11,4$	6	8	10	14	18
6	$14,7$	8	10	13	18	23
7	$18,2$	10	13	17	22	28
8	$21,7$	13	16	20	26	33
9	$25,4$	15	18	23	30	38
10	$29,2$	17	21	27	35	44
11	$33,2$	20	24	31	39	49
12	$37,3$	23	28	35	44	55
13	$41,4$	25	31	38	49	61
14	$45,6$	28	34	42	54	67
15	$49,7$	31	37	46	58	73
16	$54,1$	34	41	51	63	79
17	$58,5$	37	44	55	68	85
18	$63,0$	40	48	59	74	91
19	$67,5$	43	52	63	79	97
20	$71,9$	46	55	67	84	103

A. Une première approche

À l'aide des simulations effectuées, estimer :

1. le nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'en moyenne, les amateurs de biscuits achètent 30 boîtes de biscuits pour les obtenir toutes.
2. le nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour que 50 % des amateurs de biscuits aient la collection complète avec 35 boîtes de biscuits ou moins.
3. le plus grand nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'il y ait au plus 10 % de mécontents, sachant qu'un mécontent est une personne qui doit acheter 50 boîtes de biscuits ou plus pour avoir la collection complète.
4. le plus petit nombre de figurines distinctes à mettre en circulation pour qu'il y ait au plus 10 % de collectionneurs qui réunissent toutes les figurines en achetant 16 boîtes de biscuits ou moins.

Dans toute la suite, on choisit de mettre en circulation 11 figurines distinctes (c'est-à-dire que $s = 11$).

B. Coût de la collection complète

Une boîte de biscuits est vendue $2,50$ € l'unité. Chaque figurine peut être achetée séparément chez le libraire à $8,90$ € l'unité.

1. Si Timéo achète toutes ses figurines chez le libraire, quel est le montant de sa collection complète ?
2. Avec cet argent, combien peut-il acheter de boîtes de biscuits ? Peut-on estimer la probabilité qu'a Timéo de compléter sa collection de figurines en achetant ce nombre de boîtes de biscuits ?
3. À combien faudrait-il fixer le prix unitaire d'une boîte de biscuits pour que la probabilité que Timéo obtienne toutes les figurines en achetant des biscuits pour un montant égal au coût de la collection complète chez le libraire soit d'environ $0,9$?
   On arrondira le résultat à 10^{-2} près.

C. Quelques résultats théoriques

1. Quel nombre minimum de boîtes de biscuits Timéo devra-t-il acheter pour espérer avoir toutes les figurines dans sa collection ?
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a) Exprimer, en fonction de n, la probabilité, notée q_n, de l'événement « Timéo n'a obtenu qu'une seule figurine en ayant acheté n boîtes de biscuits. » On pourra s'appuyer sur un arbre.
   b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le plus petit entier n tel que q_n soit inférieure ou égale à 10^{-6}.
3. On souhaite calculer la probabilité, notée p_{11}, de l'événement « Timéo réunit la collection complète des 11 figurines en achetant exactement 11 boîtes de biscuits. »
   a) À l'aide du tableau donné en début de partie **II**, donner un majorant de cette probabilité.
   b) Combien existe-t-il de façons différentes d'obtenir une suite de 11 figurines non nécessairement distinctes en achetant succesivement 11 boîtes de biscuits ?
   c) Combien existe-t-il de façons différentes de réunir 11 figurines distinctes en achetant successivement 11 boîtes de biscuits ? On pourra s'aider d'un arbre.
   d) En déduire la probabilité p_{11}.
   On arrondira le résultat à 10^{-5} *près.*