OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2004

ACADEMIE DE BESANCON

DUREE 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu.

Les calculatrices sont autorisées.

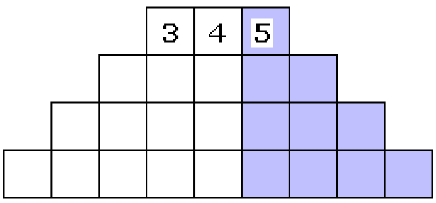
Recommandations

Il est important d'argumenter ses propositions.

Même s'il n'aboutit pas à la solution complète d'une question, le candidat est invité à décrire sa démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

De même, si un candidat découvre une erreur dans ses résultats ou sa démarche, il est bon qu'il l'explique.

EXERCICE 1



On se propose de continuer à remplir le tableau ci-contre avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

Règle 1 Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.

Règle 2 Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

Remarque La première ligne a été remplie grâce à l'égalité bien connue: $3^2 + 4^2 = 5^2$

1. Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.

2. Remplir les deux lignes suivantes.

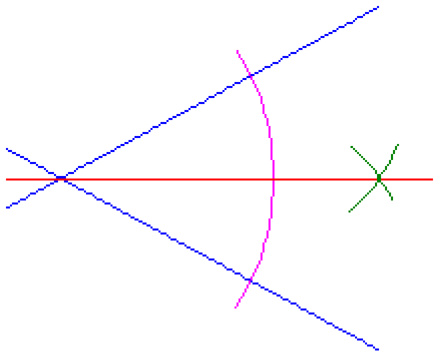
3. Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004.

Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

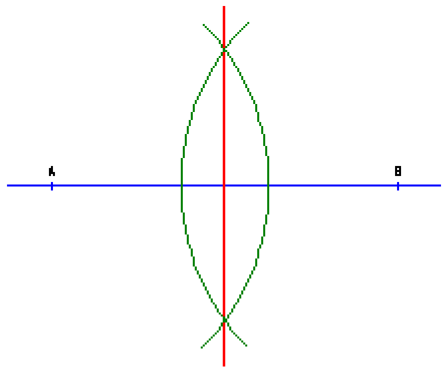
EXERCICE 2

Avec un compas et une règle non graduée, on sait faire beaucoup de choses ; ainsi

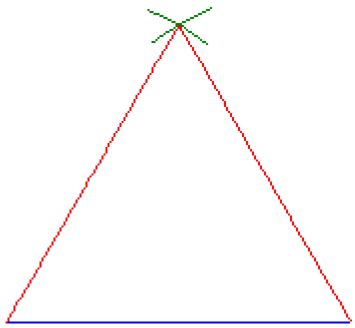
- Tracer une bissectrice de deux droites



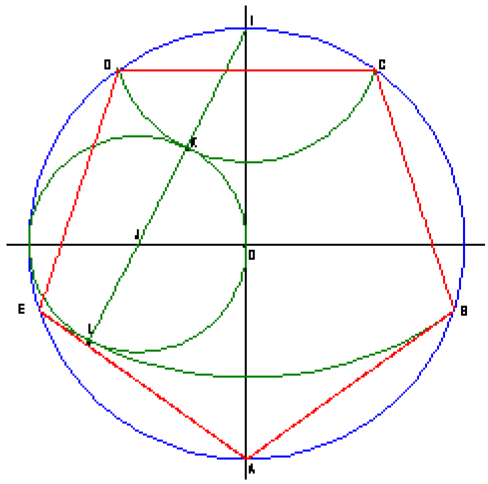
- Tracer la médiatrice de deux points



- Tracer un triangle équilatéral



- Et même tracer un pentagone régulier



On sait faire bien d'autres choses encore mais pas tout !

Ainsi, les Grecs ont en vain essayé de chercher une construction de trisection de l'angle : au lieu de diviser un angle en deux parties égales (la " bissection "), ils voulaient diviser l'angle en trois parties égales (la " trisection ").

Il a fallu attendre beaucoup plus tard (XIX$^{\text{ième}}$ siècle) pour démontrer que ce n'est pas toujours possible : par exemple, il est impossible avec une simple règle non graduée et un compas de partager un angle de 60° en trois parties égales.

Ayant pu tracer un triangle équilatéral, on sait donc tracer un angle de 60° uniquement avec une règle (non graduée) et un compas.

On dit qu'un angle de 60° est "constructible à la règle et au compas".

A l'aide de tous les renseignements donnés dans cette présentation, répondez aux questions suivantes :

<u>Question 1</u> : peut-on construire à la règle et au compas un angle de 45° ? de 10° ?

Question 2 : quel est le plus petit angle non nul dont la mesure est un nombre entier positif de degrés et qui est " constructible à la règle et au compas " ?

EXERCICE 3

On définit pour chaque couple de réels (a,b) la fonction f par : $f(x) = a - \sqrt{x+b}$.

Deux nombres réels u et v distincts sont dits *échangeables* s'il existe au moins un couple de réels (a,b) tel que la fonction f vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.

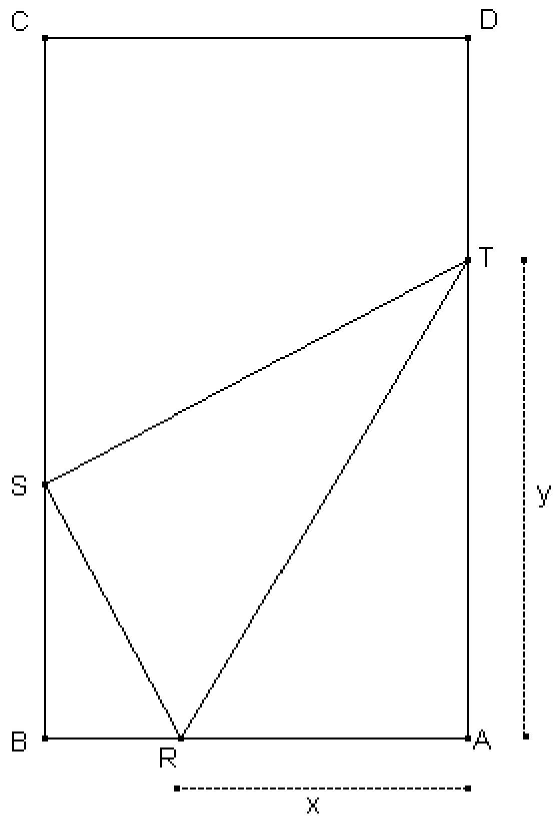
1. Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2. Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3. A quelle condition deux entiers u et v sont-ils échangeables ?

EXERCICE 4

Soit ABCD une feuille de papier rectangulaire de largeur AB = 4 et de longueur BC = 6.

Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille).

On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir figure ci-contre.



Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).

On pose AR = x et AT = y.

1. Trouver les valeurs minimale et maximale de x.
2. Trouver une relation entre x et y lorsque S se déplace sur [BC].

3. Trouver la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale.
   Quelle est alors la nature du triangle AST ?