Commentaires sur l'exercice 1

Les **questions 1 et 2** pouvaient être traitées par un élève de Première comme dans le corrigé. On a trouvé plusieurs fois cette solution avec l'astuce classique consistant à appeler x la case centrale.
En appelant x la case la plus à gauche ce qui semble naturel a priori (et beaucoup d'élèves ont réussi ainsi), les équations sont à peine plus compliquées et nécessitent l'utilisation du discriminant Δ … à moins de remarquer qu'en ligne n, $-n$ est une solution évidente qui bien que non recevable permet une factorisation par $(x+n)$.

Pour la **question 3**, la solution développée dans le corrigé, hors la notation $\sum$ dont on peut se passer, nécessite la connaissance des suites arithmétiques.
Une élève qui a réussi à faire cette question par des moyens empiriques a regretté n'avoir pas encore vu en cours les suites, ce qui selon elle aurait pu simplifier sa solution (certes !… et la justifier).
Les élèves ont fait preuve de beaucoup d'esprit d'observation et d'extrapolation, en observant soit les cases centrales (suite 4-12-24-…), soit les cases les plus à gauche (suite 3-10-21-…) ou les plus à droite (suite 5-14-27-….). De bons tests de Q.I. en perspsective !
Notons pour les initiés que les suites en question étant polynomiales du second degré donc linéaires récurrentes d'ordre 2, les différences succesives sont arithmétiques. C'est ceci qui a permis aux élèves d'extrapoler…
Ainsi un élève a observé que la case la plus à gauche est le produit du numéro de la ligne et du nombre d'éléments de la ligne ($2n^2+n=n(2n+1)$).
D'autres ont vu que la case centrale est .
Beaucoup ont cherché à observé le procédé de passage d'une ligne à l'autre (récurrence) et ont réitéré (avec bien du courage !…) le procédé jusqu'à arriver à 1953, 1984 ou 2015.
Un élève a reconnu avoir réalisé 70 lignes de calculs pour arriver au résultat (en l'occurrence exact !…).
Tous ces observateurs en herbe ont extrapolé (certains de manière malheureuse) sans jamais justifier réellement. Mais nous n'avons pu leur en tenir rigueur.
Le temps viendra un jour pour eux de prendre conscience de la nécessité de justifier leur extrapolation… et de s'extasier par l'économie apportée dans leurs calculs par la théorie.
Notre bonheur a été de noter une fois de plus les trésors d'imagination développés par les candidats.
Notre regret est de regretter une fois de plus que leur « boîte à outils » est trop peu fournie ! Et pourtant, que d'attente chez eux !…

René Ligier, pour la Cellule Académique de Besançon

EXERCICE 1 corrigé

1. Notons x la case centrale :
   x est naturel et $x \geq 1$ (car $x-1$ est naturel)
   il vient $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ soit $x^2 - 4x = 0$ soit $x(x-4) = 0$.
   Comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 4$. Les trois cases sont donc 3-4-5.

2. On adopte la même méthode pour les deux lignes suivantes :
   c. L'équation s'écrit $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$
      soit $x(x-12) = 0$; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 12$.
      Les cinq cases sont donc 10-11-12-13-14.
      On vérifie bien que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 = 13^2 + 14^2$.
   d. L'équation s'écrit
      $(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$
      soit $x(x-24) = 0$; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 24$.
      Les sept cases sont donc 21-22-23-24-25-26-27.
      On vérifie bien que $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2030 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.

5. *Plus généralement la ligne n amènera l'équation :* $\sum_{i=0}^{n}(x-i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x+i)^2$ *soit*

après simplification et factorisation $x\left(x - 4\sum_{i=1}^{n} i\right) = 0$.

La case centrale sera donc $x = 4\sum_{i=1}^{n} i = 2n(n+1) = 2n^2 + 2n$.

Les cases extrêmes seront $x - n = 2n^2 + n$ *et* $x + n = 2n^2 + 3n$.

Il s'agit donc de savoir s'il existe n tel que $2n^2 + n \leq 2004 \leq 2n^2 + 3n$.

Or $2n^2 \leq 2n^2 + n \leq 2n^2 + 3n < 2n^2 + 4n + 2 = 2(n+1)^2$.

n doit donc vérfier (mais ce n'est pas suffisant !) $2n^2 \leq 2004 < 2(n+1)^2$

soit $n^2 \leq 1002 < (n+1)^2$ *soit* $n \leq \sqrt{1002} < n+1$.

Ainsi n s'il existe ne peut être que $E\left[\sqrt{1002}\right] = 31$.

Vérifions qu'il convient : pour $n = 31$,

la case extrême à gauche est $2n^2 + n = 1953$

la case centrale est $2n^2 + 2n = 1984$

la case extrême à droite est $2n^2 + 3n = 2015$

Ainsi $1953 < 2004 < 2015$ *et comme* $2015 - 2004 + 1 = 12$

2004 est dans la 31[ième] ligne, dans la 12[ième] case (grisée) à partir de la droite.

EXERCICE 2 corrigé

Avant de commencer
L'énoncé prenait les allures d'un jeu de piste.
Il permettait de rappeler à l'élève qu'on sait partager un angle en deux parties égales (bissectrice, figure 1), tracer un angle droit (médiatrice, figure 2) ou un angle de 60° (triangle équilatéral, figure 3).
Il faisait découvrir éventuellement (figure 4) la construction du pentagone régulier derrière lequel se cache un angle au centre de 72° (360/5).
Le paragraphe historique lui apprenait qu'on ne savait pas effectuer la trisection de certains angles, comme par exemple de 60°.
Ainsi 20° n'est pas constructible à la règle et au compas.

Question 1

6. On obtient l'angle droit par le tracé d'une médiatrice de deux points.
   Puis par la bissectrice de cet angle droit, deux angles de 45°.
   45° est donc constructible à la règle et au compas.
7. Si on pouvait construire 10° à la règle et au compas, on pourrait construire 20° en doublant l'angle précédent (par un report d'angle).
   Ce qui n'est pas le cas.
   10° n'est donc pas constructible à la règle et au compas.

Question 2
Par soustraction, on peut contruire un angle de 72° - 60° = 12°.
Puis par deux bissectrices, on obtient un angle de 3°.
On ne peut faire mieux car si on pouvait construire 1° ou 2°, on pourrait construire par report d'angles 20° (20 fois 1° ou 10 fois 2°), ce qui n'est pas le cas.

Commentaires sur l'exercice 2

Il suffisait de mettre en œuvre à partir des angles connus comme constructibles deux procédés pour en obtenir d'autres : la bissection et la soustraction.
Si le premier a été toujours vu, il n'en a pas été de même du second.
Parmi les angles connus, ceux obtenus par le pentagone ont posé problème : beaucoup d'élèves ont considéré (cher rapporteur !…) que l'angle au sommet du pentagone avait pour mesure 110° ce qui changeait fortement la donne !…
Enfin la non constructibilité de 10° et le caractère minimal pour 3° reposait sur le raisonnement par l'absurde. Procédé très peu utilisé !…
Pour 10° les élèves faisaient bien référence à 20° (ce qui traduisait une bonne interprétation de l'énoncé) et écrivaient « comme 20° n'est pas constructible, 10° ne l'est pas non plus » mais en faisant référence au principe de bissection (20/2=10) et non de report (10+10=20). C'est évidemment une erreur de raisonnement.
Deux candidats seulement ont clairement mis en place le raisonnement par l'absurde (un pour la non-constructibilité de 10°, l'autre pour le caractère minimal de 3°).
Une certaine déception sur cet exercice dont la partie essentielle reposait sur la logique. Il semble que de ce côté-là, il y a du travail à faire dans nos classes !

EXERCICE 3 Correction

Question 1

Avec un peu de chance on propose : $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ qui vérifie bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Si l'on n'a pas cette intuition, on résout le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 \ (1) \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \ (2) \end{cases}$$

Par soustraction (1) – (2) il vient $\sqrt{3+b} - \sqrt{2+b} = 1$

soit $\sqrt{3+b} = \sqrt{2+b} + 1$,

soit en élevant au carré $3 + b = 2 + b + 1 + 2\sqrt{2+b}$

soit $2\sqrt{2+b} = 0$, soit $b = -2$.

Il vient en substituant dans (1) : $a = 3$.

On obtient donc $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

Il est alors impératif de vérifier qu'on a bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Beaucoup d'élèves oublient de le faire et n'ont ainsi rien démontré…

Question 2

On résout de même le système : $\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 \ (1) \\ a - \sqrt{7+b} = 4 \ (2) \end{cases}$

Par soustraction (1) – (2) il vient $\sqrt{7+b} - \sqrt{4+b} = 3$

soit $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$,

soit en élevant au carré $7 + b = 4 + b + 9 + 6\sqrt{4+b}$

soit $6\sqrt{4+b} = -6$ ce qui est évidemment impossible.

4 et 7 ne sont donc pas échangeables, ce que confirme la question 3.

Question 3 (plus dure)

On recherche u et v entiers (avec par exemple $v > u$) et a et b réels tels que

$$\begin{cases} a - \sqrt{u+b} = v \ (1) \\ a - \sqrt{v+b} = u \ (2) \end{cases}$$

Analyse :

Par soustraction (1) – (2) il vient $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b} = v - u$ (3).

Posons $x = u + b$ et $d = v - u$; par hypothèse $d \in \mathbb{N}^*$.

L'équation (3) devient alors $\sqrt{x+d} - \sqrt{x} = d$ ou encore $\sqrt{x+d} = \sqrt{x} + d$.

On en déduit en élevant au carré $x + d = x + d^2 + 2d\sqrt{x}$ soit $d = d^2 + 2d\sqrt{x}$

soit encore en divisant par d ($d \in \mathbb{N}^*$) : $1 - d = 2\sqrt{x}$.

Comme $\sqrt{x} \geq 0$ il vient $d \geq 1$ et comme $d \in \mathbb{N}^*$, finalement: $d = 1$ et $x = 0$

Ainsi $v = u + 1$ donc u et v sont consécutifs.

De plus $b = -u$ et en substituant dans (1) : $a = v = u + 1$.

Synthèse

Si u et v sont consécutifs avec $v = u + 1$, si nous prenons la fonction définie par $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ où $a = u + 1 = v$ et $b = -u$, soit encore $f(x) = u + 1 - \sqrt{x - u}$,

on vérifie que $\begin{cases} f(u) = u + 1 - \sqrt{u - u} = u + 1 = v \\ f(v) = u + 1 - \sqrt{v - u} = u + 1 - 1 = u \end{cases}$

donc u et v sont échangeables.

Conclusion

Deux entiers naturels u et v sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs.

EXERCICE 3 Commentaires

La question 3 a été très peu abordée. Beaucoup d'élèves ont intuité le résultat, un seul l'a à peu près démontré.

Dans la question 1, la plupart des élèves ont trouvé f par analyse , mais beaucoup ont oublié la synthèse, ou ont vérifié après avoir conclu que 2 et 3 sont échangeables et non avant. Ils ne distinguent donc pas encore une vérification impérative (synthèse) d'une simple vérification calculatoire (c'est-à-dire pour se rassurer). Cette erreur a provoqué ainsi parfois une erreur de conclusion en question 2.