

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2003

ACADEMIE DE BESANCON

DUREE 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu.

Les calculatrices sont autorisées.

Recommandations

Il est important d'argumenter ses propositions.

Même s'il n'aboutit pas à la solution complète d'une question, le candidat est invité à décrire sa démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

De même, si un candidat découvre une erreur dans ses résultats ou sa démarche, il est bon qu'il l'explique.

EXERCICE 1

Les pages d'un livre sont numérotées de 1 à n (on rappelle que la page numérotée 1 est toujours une page de droite). On additionne les numéros de toutes les pages et on trouve un total égal à 2003. Mais deux pages numérotées sont restées collées et leurs numéros n'ont pas été comptés.

Quels sont le nombre de pages du livre et les numéros des pages collées

EXERCICE 2

On se propose de déterminer toutes les configurations de quatre points distincts A, B, C, D du plan tels que leurs distances mutuelles AB, AC, AD, BC, BD, CD , ne prennent que deux valeurs exactement que l'on notera x et y . C'est par exemple le cas lorsque $ABCD$ est un carré, x est la longueur des côtés et y celle des diagonales.

1. Etude du cas «1,5» où l'une des distances est égale à x et les cinq autres à y .

Montrer qu'il existe, à l'ordre près des points, une seule configuration répondant à la question. Dessiner cette configuration.

2. Etude du cas «2,4» où deux distances sont égales à x et les quatre autres à y .

a. On suppose que les deux segments de longueur x n'ont pas de sommet commun.

Quelle configuration obtient-on ? La dessiner.

b. Que se passe-t-il lorsque les deux segments de longueur x ont un sommet en commun ?

3. Etudier le cas «3,3».

EXERCICE 3

En hommage au célèbre mathématicien grec Alex POZANDIS (1920-1992) qui leur a consacré l'essentiel de ses recherches, certains nombres entiers sont aujourd'hui appelés *nombres de Pozandis*.

Un entier naturel N , non nul, est un *nombre de Pozandis* si tout entier naturel de 1 à N est égal à une somme de diviseurs *isolés* de N , un diviseur étant *isolé* s'il n'apparaît pas plus d'une fois dans la somme.

Cette somme peut, évidemment, être réduite à un seul nombre.

Exemple: 6 est un *nombre de Pozandis* car ses diviseurs sont **1, 2, 3, 6** et on a :

• $1=1$ • $2=2$ • $3=3$ ou $3=2+1$

• $4=3+1$ • $5=3+2$ • $6=6$ ou $6=3+2+1$

1. Donner, sans justification, les dix premiers *nombres de Pozandis*.

2. Les années d'Alex POZANDIS (1920 et 1992) sont-elles des *nombres de Pozandis* ?

3. Montrer qu'avant la fin du XXI^{ème} siècle, au moins une année sera un *nombre de Pozandis*.

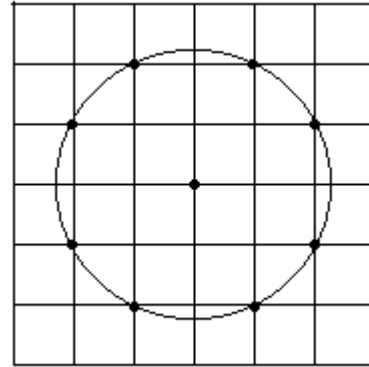
EXERCICE 4

René dispose dans son jardin d'une très grande terrasse carrelée avec des dalles carrées de 0,5 m de côté. Il décide de construire sur cette terrasse une table ronde avec les pieds sur le bord et un parasol central.

René est un bricoleur prévoyant, aussi, pour gagner en stabilité, il décide que la table devra avoir le maximum de pieds, tous solidement fixés dans le sol. Tout comme le parasol car on n'est jamais à l'abri d'un coup de vent ...

Mais René est aussi un bricoleur soigneux, alors, pour ne pas détériorer les dalles, il choisit de percer la terrasse uniquement aux intersections des joints de séparation.

La figure ci-contre donne un exemple de table à 8 pieds.



Si N désigne le nombre de pieds de la table et D son diamètre exprimé en mètres, on définit le *coefficient de solidité* s de la table par la formule $s = \frac{N}{D}$. Une table est donc d'autant plus solide que son coefficient de solidité est élevé.

1. Calculer le coefficient de solidité de la table dessinée ci-dessus.
2. Quelles sont les deux tables les plus petites ? Préciser leur coefficient de solidité.
3. Quel est le coefficient de solidité maximum d'une table à 12 pieds ?
4. Quelle est la table la plus solide ?
5. René peut-il fabriquer une table à 16 pieds dont le diamètre exprimé en mètres est un nombre entier ?

[Retour au sommaire "Olympiades"](#)