EXERCICE 3

1. Réponse: 1, 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24.

2. • Parmi les nombreux (trente-deux) diviseurs de 1920 on trouve:

1, 2, 4, 8, 15, 30, 60, 120, 240, 480, 960 et 1920.

si	$n \in [960, 1919]$	alors	$n = 960 + m$	avec	$0 \leq m \leq 959$
si	$n \in [480, 959]$	alors	$n = 480 + m$	avec	$0 \leq m \leq 479$
si	$n \in [240, 479]$	alors	$n = 240 + m$	avec	$0 \leq m \leq 239$
si	$n \in [120, 239]$	alors	$n = 120 + m$	avec	$0 \leq m \leq 119$
si	$n \in [60, 119]$	alors	$n = 60 + m$	avec	$0 \leq m \leq 59$
si	$n \in [30, 59]$	alors	$n = 30 + m$	avec	$0 \leq m \leq 29$
si	$n \in [15, 29]$	alors	$n = 15 + m$	avec	$0 \leq m \leq 14$
si	$n \in [8, 14]$	alors	$n = 8 + m$	avec	$0 \leq m \leq 6$
si	$n \in [4, 7]$	alors	$n = 4 + m$	avec	$0 \leq m \leq 3$
si	$n \in [2, 3]$	alors	$n = 2 + m$	avec	$0 \leq m \leq 1$

Pour tout entier n compris entre 2 et 1919, le tableau précédent permet de trouver un m. En faisant jouer à m le rôle de n, et en recommençant, on finit par écrire n comme somme de diviseurs de 1920. Et ces diviseurs sont distincts car n et m ne sont jamais dans le même intervalle. Donc 1920 est donc bien un *nombre de Pozandis*.

• $1992=2^3 x3x83$ donc les premiers diviseurs de 1992 sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, 83
Comme, 1+2+3+4+6+8+12+24=60, l'entier 61 ne peut pas être égal à une somme de diviseurs *isolés* de 1992 qui n'est donc pas une année *de Pozandis*.

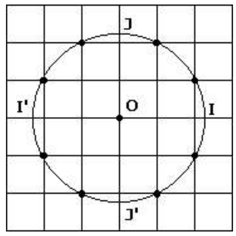
3. La démarche précédente suggère de tenter une puissance de 2.
La seule année puissance de 2 du XXIème siècle est 2^{11}=2048. Les diviseurs de 2048 sont:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 et 2048

On montre alors avec le même raisonnement que celui de la question précédente que 2048 est bien *un nombre de Pozandis*.

<u>Remarque</u>: Pour tout entier n de 1 à 2048, l'*écriture binaire* de n donne directement la somme des diviseurs isolés de 2048.

EXERCICE 4



On choisit le centre O de la table pour origine, le côté de la dalle comme unité, on note [II'] et [JJ'] les deux diamètres qui suivent les joints de séparation et R le rayon de la table.
Un pied est ainsi assimilé à un point à coordonnées entières dans le repère orthonormal d'origine O et d'axes (II') et (JJ').

Le problème revient alors à chercher des couples d'entiers (a,b) vérifiant la relation $a^2+b^2=R^2$

5	25	26	29	34	41	50
4	16	17	20	25	32	41
3	9	10	13	18	25	34
2	4	5	8	13	20	29
1	1	2	5	10	17	26
0	0	1	4	9	16	25
	0	1	2	3	4	5

Le tableau [T] ci-contre donne les premières sommes a^2+b^2 avec a et b positifs, soit pour un quart de table, ce qui, pour des raisons de symétrie est bien suffisant. Les cases grises correspondent aux pieds qui se trouvent sur les segments [OI] et [OJ].

Notons que si a ou b est strictement supérieur à 5, $a^2+b^2>25$.

1. On a $R=\sqrt{5}$ donc $s=\dfrac{8}{2\sqrt{5}\times 0{,}5}=\dfrac{8\sqrt{5}}{5}\approx 3{,}58$

2. Le tableau [T] montre que les deux plus petites tables ont pour rayons respectifs 1 et $\sqrt{2}$.

- Si $R=1$ la table a 4 pieds, d'où $s=\dfrac{4}{2\times 0{,}5}=4$
- Si $R=\sqrt{2}$ la table a encore 4 pieds, d'où $s=\dfrac{4}{2\sqrt{2}\times 0{,}5}=2\sqrt{2}\approx 2{,}82$

3. La table a 12 pieds la plus solide est la plus petite car, si N est constant, $s\geq s' \Leftrightarrow D\leq D'$.

• <u>Si R est un nombre entier</u>.
Il y a déjà 4 pieds en I, I', J et J'. Il reste alors, pour des raisons de symétrie, 2 pieds par quart de table et le nombre R^2 doit apparaître quatre fois dans le tableau [T] dont deux dans les cases grises .

La première solution apparaît pour $R=5$. On a alors $s=\dfrac{12}{10\times 0{,}5}=2{,}4$.

• <u>Si R n'est pas un nombre entier</u>.
Il n'y a pas de pieds en I, I', J, J'. Il y a alors 3 pieds par quart de table et donc, le nombre R^2 doit apparaître trois fois dans les cases blanches du tableau [T] .
Comme aucun nombre n'apparaît trois fois dans les cases blanches du tableau, il est clair que dans ce cas, une table à 12 pieds a un rayon srtictement supérieur à 25.

• <u>Conclusion</u> La table à 12 pieds la plus solide est celle de rayon 5. En conséquence, le coefficient de solidité maximum d'une table à 12 pieds est 2,4.

4. • <u>Si R n'est pas un nombre entier</u>.
Le nombre de pieds par quart de table est au maximum égal à la partie entière de R. On la note E(R)

Comme il n'y a pas de pieds en I, I', J, J', on a $N\leq 4E(R)<4R$ et donc $s=\dfrac{N}{2R\times 0{,}5}=\dfrac{N}{R}<4$

• <u>Si R est un nombre entier</u>.

Il y a déjà 4 pieds en I, I', J et J' et donc au maximum $R-1$ pieds par quart de table ouvert (c'est à dire sans les extrémités).
Donc $N \leq 4(R-1)+4 = 4R$ et, comme précédemment, $s \leq 4$.

Si $s = 4$ alors $N = 4R$ et donc il y a exactement $R-1$ pieds par quart de table, ce qui impose en particulier un pied de coordonnées $(R-1,1)$. Mais, $(R-1)^2 + 1^2 = R^2 \Leftrightarrow R = 1$

<u>Conclusion</u>. Toutes les tables sauf la plus petite ont un coefficient de solidité strictement inférieur à 4. La table la plus solide est donc la plus petite.

5. Comme une dalle mesure 0,5 m, si D exprimé en mètres est un nombre entier, alors R qui est exprimé en nombre de dalles est lui aussi entier.

Et, si une table a 16 pieds et un rayon entier, il y a quatre pieds sur les axes et donc encore trois pieds par quart de table ouvert. Pour des raisons de symétrie il doit y avoir des pieds sur les bissectrices des angles IOJ et I'OJ'. On a alors nécessairement un couple (a,b) avec a et b positifs, pour lequel $a = b$. Notons le (a_0, b_0).

On en déduit $R = a_0\sqrt{2}$ et donc $\sqrt{2} = \dfrac{R}{a_0}$.

Mais si R est entier, $\dfrac{R}{a_0}$ est rationnel. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, René ne pourra pas construire cette table.