OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2001

ACADEMIE DE BESANCON

DUREE 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu.
Les calculatrices sont autorisées.

Il est important que le candidat sache argumenter ses propositions.
Même s'il n'aboutit pas à la solution totale d'une question ou d'un exercice, il est intéressant qu'il décrive son itinéraire de recherche.
Un résultat même partiel peut avoir son intérêt.
Si le candidat découvre une erreur dans son raisonnement ou ses résultats, il est bon qu'il l'explique.
Le jury tiendra compte du suivi de toutes ces recommandations.

Exercice 1

Les faces d'un dé en forme de tétraèdre régulier sont numérotées de 1 à 4.

Le dé est posé sur une table, face « 1 » contre cette table.

Une étape consiste à faire basculer le dé autour de l'une quelconque des arêtes de sa base.

A l'issue de chaque étape, on note le numéro de la face contre la table. On fait la somme S de tous ces nombres après 2001 étapes, en comptant aussi le « 1 » initial.

1. Donner la valeur maximale et la valeur minimale que l'on peut ainsi obtenir pour S.

2. La somme S peut-elle prendre toutes les valeurs entières comprises entre ces deux valeurs ?

Exercice 2

Alain et Benoît jouent au baby-foot et notent le score après chaque but sur une fiche.

Exemple de fiche pour une partie en 5 balles remportée 3 buts à 2 par Alain.

Alain	1	2	2	2	3
Benoît	0	0	1	2	2

On remarque que dans cette partie, Benoît n'a jamais mené au score.

1. Combien peut-on trouver de fiches possibles (du type de celle donnée ci-dessus) pour une partie en cinq balles où Benoît n'a jamais mené au score ?

2. Combien peut-on trouver de fiches possibles pour une partie en dix balles où Benoît n'a jamais mené au score ?

3. Alain et Benoît jouent un nombre pair de balles. On note N le nombre de fiches possibles où Benoît n'a jamais mené au score.

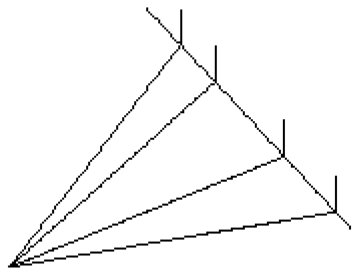
Exprimer en fonction de N le nombre de ces fiches où Benoît a égalisé au moins une fois.

Exercice 3

Sur un terrain de jeu sont alignés quatre poteaux, plantés en A, B, C et D dans cet ordre.

Ces poteaux délimitent trois buts de largeurs : AB = 1, BC = 2, CD = d, où d est une longueur donnée.

Déterminer l'ensemble des points M du terrain d'où l'on voit les trois buts sous des angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMD}$ égaux.



Exercice 4

Dessinez un cube *C* (un dessin même approximatif en perspective suffira).

Soient A un de ses sommets et B le sommet opposé, c'est-à-dire tel que le milieu du segment [AB] soit le centre du cube.

Considérons un autre cube *C'* admettant aussi (A,B) comme couple de sommets opposés. Certaines arêtes de *C* rencontrent des arêtes de *C'*.

Justifiez le fait que, en dehors de A et B, on obtienne ainsi six points d'intersection entre une arête de *C* et une arête de *C'*.

Placez l'un d'eux sur le dessin et expliquez comment placer alors les cinq autres.

V étant le volume de *C*, quelle est la valeur minimale du volume de la portion d'espace commune aux cubes *C* et *C'*.