

Le tournoi de baby-foot

Corrigé

Question 1

- 1^{ière} Méthode

On fait un arbre : 5 branches conduisent au score de 3 à 2

4 branches conduisent au score de 4 à 1

et une branche conduit au score de 5 à 0

Soit au total 10 fiches

- 2^{ième} Méthode

On construit un tableau de type Pascal :

	0	1	2	3	4	5
0		0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0
3	1	3	5	5	0	0
4	1	4	9	14	14	0
5	1	5	14	28	42	42

L'indice de ligne est le score d'Alain, l'indice de colonne le score de Benoît

Le mode de formation est illustré par les chiffres bleus : $14 + 28 = 42$

en effet pour arriver au score de 5-4, le score avant la dernière balle était de 5-3 (et Benoît gagne) ou de 4-4 (et Benoît perd).

Le **1** rouge correspond à l'initialisation :

à la première partie nécessairement Alain gagne

Les chiffres en noir gras correspondent aux parties en cinq balles correspondant au critère demandé : $1 + 4 + 5 = 10$ soit au total 10 fiches

Question 2

- Seule la 2^{ième} méthode est vraiment raisonnable : on prolonge le tableau :

	0	1	2	3	4	5
0		0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	2	0	0	0
3	1	3	5	5	0	0
4	1	4	9	14	14	0
5	1	5	14	28	42	42
6	1	6	20	48	90	
7	1	7	27	75		

8	1	8	35			
9	1	9				
10	1					

On obtient donc $1 + 9 + 35 + 75 + 90 + 42 = 252$ fiches

Question 3

On note u_n le nombre de fiches où Benoît n'a jamais mené dans une partie à n balles.

Comme n est pair, il ne peut y avoir égalité après la $(n-1)^{\text{ième}}$ balle jouée, donc Alain mène et sur la $n^{\text{ième}}$ balle, l'un comme l'autre peut gagner donc chaque fiche à $n-1$ balles produit deux fiches à n balles.

$$\text{donc } u_n = 2 \times u_{n-1}$$

On note v_n le nombre de fiches où Benoît n'a ni mené au score, ni égalisé dans une partie à n balles.

Compte tenu du fait qu'Alain marque le premier but, il suit une partie à $n-1$ balles dans laquelle Benoît peut au pire égaliser sans jamais mener

$$\text{donc } v_n = u_{n-1} \text{ et donc } v_n = \frac{u_n}{2} = \frac{N}{2}$$

Et donc le nombre de parties où Benoît n'a jamais mené mais égalisé au moins une fois est égal à $u_n - v_n = N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$

Prolongement : montrer que $u_n = C_n^{E(n/2)}$