TP de mathématiques

$\boxed{\text{TP 2009}}$

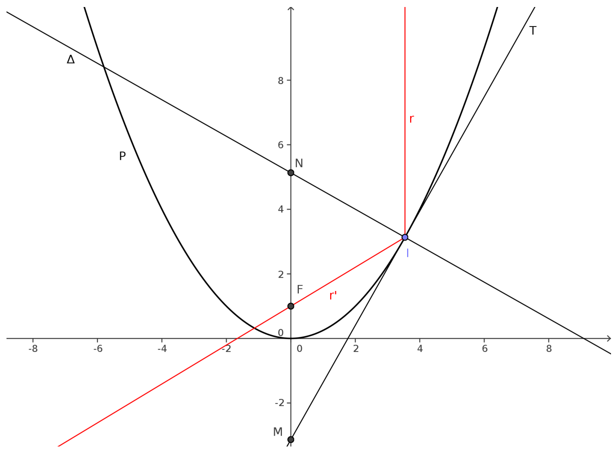
Propriétés de la parabole

Énoncé

On se propose d'étudier une propriété géométrique de la parabole, qui explique son utilisation dans certaines antennes, ou dans les miroirs utilisés dans les phares ou les lampes de poche. Dans cet exercice on étudie sur une coupe plane la trajectoire des ondes reçues et réfléchies par une antenne parabolique. On admet que la section plane de cette antenne est une parabole, et on assimile ces ondes à des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe de la parabole.

On rapporte le plan à un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ et on considère la parabole P d'équation $y = 0,25x^2$.

Soit I un point de P, appelé point d'incidence. La demi-droite r d'origine I et parallèle à l'axe des ordonnées représente le rayon incident en I.
Soit T la tangente en I à P. La droite Δ passant par I et orthogonale à T s'appelle la normale en I à la parabole.
Selon les lois de la réflexion de Descartes, la demi-droite r' représentant le rayon réfléchi en I est symétrique de r par rapport à la droite Δ.
On suppose que I est distinct du point O. On note M, N et F les points d'intersection respectifs des droites T et Δ, et de la demi-droite r' avec l'axe des ordonnées.



1. (a) Représenter cette situation à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
   (b) Observer la trajectoire de plusieurs rayons. Que constate-t-on ?
   (c) Conjecturer la nature des triangles IMF et INF.
2. En s'appuyant sur des propriétés des angles de la figure, établir la nature des triangles IMF et INF et en déduire la position relative des points M, N et F.
3. On note a l'abscisse du point I.
   (a) Déterminer les coordonnées des points M et N, puis celles du point F, en fonction de a.
   (b) Conclure l'étude en énonçant la propriété de la demi-droite r' qui vient d'être démontrée.

La suite est-elle convergente ?

Énoncé

Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$.

L'objet de cet exercice est d'étudier la convergence de cette suite, et de comparer deux outils logiciels permettant de l'explorer.

1. À l'aide d'un logiciel adapté (calcul numérique ou calcul formel), calculer l'intégrale u_n pour diverses valeurs de n et faire des conjectures sur le signe et la convergence de cette suite.
2. Calculer u_0.
   Par une intégration par parties, on peut démontrer que la suite (u_n) est définie par u_0 et, pour tout $n > 0$, par la relation $\mathcal{R}$: $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.
3. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer, à l'aide de la relation $\mathcal{R}$, les valeurs approchées, à la précision 10^{-8}, des 51 premiers termes de la suite (u_n).
4. Comparer les résultats obtenus avec les deux approches. Quelle première réflexion cela vous inspire-t-il ?
5. Démontrer, pour tout entier naturel non nul n, l'encadrement : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n+1}$.
6. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
7. Comment expliquer le résultat des calculs de la question 1 ?

Résolution d'une équation trigonométrique

Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin 2x + \cos x\ .$$

1. À l'aide du grapheur, tracer la courbe (C) de f sur l'intervalle de votre choix.
2. Conjecturer une période possible pour f.
3. Lire graphiquement le nombre de solutions sur $[0; 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$, puis déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de celles qui appartiennent à l'intervalle $[0; \pi]$.
4. Justifier la périodicité de f.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
6. En déduire les solutions se trouvant dans l'intervalle $[-8\pi; -7\pi]$.

Test d'un dé tétraédrique

Énoncé

Avant d'entamer un jeu utilisant un dé tétraédrique, un joueur décide de tester le dé, comportant quatre faces numérotées de 1 à 4, afin de savoir s'il est bien équilibré ou s'il est pipé.

1. Pour cela, il lance 200 fois ce dé et il obtient le tableau suivant :

Face k	1	2	3	4
Nombre de sorties de la face k	58	49	52	41

   (a) Calculer les fréquences de sorties f_k observées pour chacune des faces.

   (b) On pose $d^2 = \sum_{k=1}^{4}\left(f_k - \frac{1}{4}\right)^2$. Calculer d^2.

2. Effectuer, à l'aide d'un logiciel adapté, une simulations de 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré. Faire afficher un tableau analogue à celui de la question 1. et calculer la valeur de d^2 correspondant à cette simulation.
3. À l'aide d'un tableur, on souhaite effectuer 1000 simulations des 200 lancers d'un dé tétraédrique bien équilibré.
4. Dans le tableau ci-dessous, on a reporté quelques caractéristiques [1] de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 obtenues :

Minimum	D_1	Q_1	Médiane	Q_3	D_9	Maximum
0,00005	0,00075	0,00155	0,00295	0,00515	0,00765	0,02135

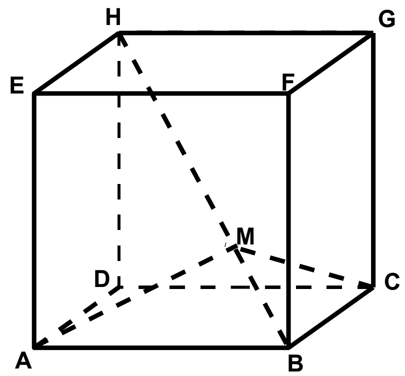
   Au risque de 10%, peut-on considérer que le dé simulé dans la question 1. est pipé ? Expliquer.

[1] D_1 et D_9 désignent les déciles 1 et 9, Q_1 et Q_3 les quartiles 1 et 3.

Angle maximum

Énoncé

On donne un nombre réel strictement positif a et on considère un cube $ABCDEFGH$ d'arrête a. Soit M un point variable de la diagonale $[HB]$. On recherche la position du point M sur $[HB]$ pour que l'angle $\widehat{AMC}$ soit maximum.



1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique construire un cube $ABCDEFGH$ d'arête a et vérifier qu'il n'existe qu'une seule position du point M telle que la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$ soit maximale.
   Quelle est alors la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$ en degrés. Préciser la position du point M sur le segment $[HB]$?
   Ces résultats dépendent-ils de la valeur de a ?
2. En sélectionnant un plan bien choisi, que constatez-vous pour l'angle $\widehat{AMB}$ lorsque l'angle $\widehat{AMC}$ est maximal ?
3. (a) Vérifier avec le logiciel que le triangle AMC est isocèle. Ce résultat sera ensuite admis.
   On pose $x = \widehat{AMC}$. Montrer que : $1 - \cos(x) = \dfrac{a^2}{MA^2}$.
   (b) Pour quelle position de M le rapport $\dfrac{a^2}{MA^2}$ est-il maximum ? On notera M_0 ce point.
   (c) Observer avec la calculatrice les variations de la fonction f, définie par :
   $f(x) = 1 - \cos(x)$ pour $x \in [0; \Pi]$.
   En déduire que l'angle $\widehat{AMC}$ est maximal quand $1 - \cos(x)$ prend la plus grande valeur possible.
   (d) Montrer que $M_0A = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ et en déduire la mesure de l'angle $\widehat{AM_0C}$ et la position de M_0 sur le segment $[HB]$.

Minimisation d'une somme

Énoncé

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note A, B et C trois points distincts du plan.
Pour tout point M intérieur au triangle ABC, on définit le réel S comme étant la somme des carrés des distances de M aux trois sommets du triangle (c'est-à-dire $S = MA^2 + MB^2 + MC^2$).
L'objet du problème est de trouver la ou les positions de M permettant d'obtenir les valeurs extrêmes de S.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, réaliser une figure illustrant la situation étudiée.
2. Étude du maximum de S.
   (a) Existe-t-il une position de M qui maximise la somme S ?
   (b) La conjecture formulée en a) reste-t-elle valable pour tout triangle ABC ?
3. Procéder de la même façon pour émettre une conjecture quant au minimum de S.
4. Dans cette question, le triangle ABC est isocèle de base $[AB]$. On note I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point P du segment $[CI]$, on trace la droite (d) perpendiculaire à la droite (CI) en P.
   Le point M est désormais un point de la droite (d) intérieur au triangle.
   (a) Où doit-on placer M sur (d) pour minimiser S ?
   Cela est-il cohérent avec l'observation faite à la question 3) ?
   (b) Démontrer la conjecture émise à la question précédente.

Étude d'une configuration de l'espace

Énoncé

Dans l'espace, on considère un triangle quelconque ABC de centre de gravité G, O un point de la droite orthogonale au plan (ABC) passant par G et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O situé dans le plan parallèle au plan (ABC) passant par O.

Pour M un point quelconque du cercle $\mathscr{C}$, on construit le tétraèdre $MABC$.

1. Faire une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
2. (a) Placer le point N milieu du segment $[AM]$ puis le point M' milieu du segment $[IN]$ où I est le milieu du segment $[BC]$.
   (b) Conjecturer une propriété remarquable de la droite (MM') lorsque le point M décrit le cercle $\mathscr{C}$.
   (c) Conjecturer le lieu de M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.
3. (a) Montrer que M' est le barycentre des points M et G affectés de coefficients que l'on précisera.
   (b) Déterminer le lieu géométrique de M' lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$.

Suite de Collatz

Énoncé

À tout n entier naturel ($n \geqslant 1$), on applique l'algorithme suivant :
Si $n = 1$ le processus s'arrête, sinon :
– si n est pair, on le transforme en $\frac{n}{2}$,
– si n est impair, on le transforme en $3n + 1$.
On note à nouveau n le résultat obtenu et on ré-applique l'algorithme à ce nouveau nombre.

Lorsque, pour l'entier n, l'algorithme aboutit à 1, on appelle « suite de Collatz associée à n » la suite (finie) des entiers rencontrés pour passer de n à 1. On note $\mathscr{L}(n)$ le nombre d'entiers de cette suite finie. $\mathscr{L}(n)$ est la longueur de la suite de Collatz associée à n. On note aussi $\mathscr{M}(n)$ le plus grand nombre apparaissant dans la suite.

Exemple : pour $n = 5$ *on obtient successivement les nombres* $5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1$ *et donc* $\mathscr{L}(5) = 6$ *et* $\mathscr{M}(5) = 16$.

1. (a) Appliquer cet algorithme aux entiers compris entre 1 et 10.
   (b) Élaborer, au moyen d'un langage de programmation, un procédé de calcul donnant les suites de Collatz des 100 premiers entiers.
   (c) Préciser les valeurs de $\mathscr{L}(26)$ et $\mathscr{L}(27)$.
2. Étude de quelques résultats particuliers relatifs aux longueurs des suites $\mathscr{L}(n)$ pour n entier naturel.
   (a) Que peut-on penser de la longueur des suites de Collatz associées aux nombres de la forme 2^p pour p entier naturel non nul ?
   (b) Que remarque-t-on quant aux suites de Collatz associées aux nombres de la forme $8k+4$ et $8k + 5$ pour $k \in N^*$?
3. Que peut-on observer concernant le reste de la division de $\mathscr{M}(n)$ par 4 ? par 3 ? par 12 ?
4. Démontrer la conjecture émise en 2a).
5. Démontrer l'un des conjectures émises en 3).

La conjecture dite de Collatz-Ulam affirme que pour tout entier non nul n le processus aboutit à 1. La longueur de la suite quant à elle n'est pas, à l'heure actuelle, prévisible en toute généralité.

Loi de probabilité

Énoncé

On définit X une variable aléatoire continue, suivant la loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.

1. À l'aide d'un outil adapté, représenter la fonction définie sur **R**+ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda t}$, pour des valeurs de λ modifiables.
2. À l'aide de l'outil et pour $\lambda = 0,125$, calculer une valeur approchée de la probabilite $P(X < a)$ où a est un paramètre strictement positif que l'on pourra fixer arbitrairement.
3. Soit b un réel positif. Proposer une utilisation du logiciel qui mette en évidence que $P_{X>b}(X > b + a)$ ne dépend que du paramètre a.
4. Démontrer que $P_{X>b}(X > b + a)$ ne dépend que de a.