OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES

2012

ACADEMIE DE BESANÇON

Durée : 4 heures

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet comprend six pages. Il est composé de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre que vous aurez choisi.

Deux de ces exercices sont des sujets nationaux, les deux autres sont des sujets académiques.

Recommandations

Il est important que vous argumentiez vos affirmations. De plus, même si vous n'aboutissez pas à la solution complète d'une question, vous êtes invité à décrire vos initiatives, votre recherche et votre démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.

Corrigés

Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à l'adresse http : // catice.ac-besancon.fr/Mathematiques

EXERCICE 1 – National

On dit qu’un nombre entier est *digisible* lorsque les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- aucun de ses chiffres n’est nul ;
- il s'écrit avec des chiffres tous différents ;
- il est divisible par chacun d'eux.

Par exemple,

- 24 est *digisible* car il est divisible par 2 et par 4.
- 324 est *digisible* car il est divisible par 3, par 2 et par 4.
- 32 n’est pas *digisible* car il n’est pas divisible par 3.

On rappelle qu’un nombre entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

1. Proposer un autre nombre *digisible* à deux chiffres.

2. Proposer un nombre *digisible* à quatre chiffres.

3. Soit n un entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

a. Démontrer que 5 est le chiffre de ses unités.

b. Démontrer que tous les chiffres de n sont impairs.

c. Démontrer que n s'écrit avec au plus quatre chiffres.

d. Déterminer le plus grand entier *digisible* s'écrivant avec un 5.

4. Soit n un entier *digisible* quelconque.

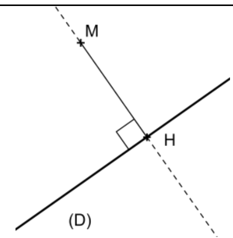
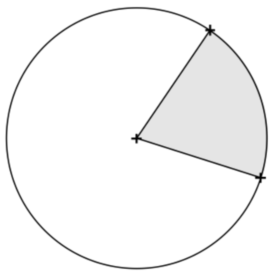
a. Démontrer que n s'écrit avec au plus sept chiffres.

b. Si n s'écrit avec sept chiffres, dont un 9, déterminer les chiffres de n.

c. Déterminer le plus grand entier *digisible*.

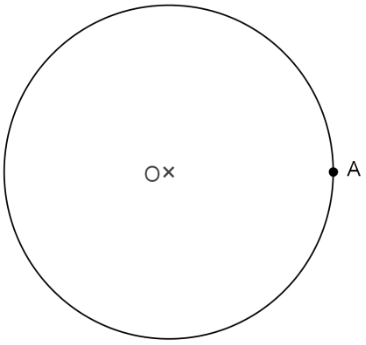
EXERCICE 2 - National

Rappels

• *On appelle* ***distance entre un point M et une droite (D)*** *la distance MH, où H est le point d’intersection de (D) avec la droite perpendiculaire à (D) passant par M.*	
• *Dans la figure ci-contre, si le rayon du disque est R, et si l’angle du secteur angulaire grisé mesure α (en degrés), alors* ***l’aire de la portion de disque*** *grisée vaut* $\pi\alpha R^2/360$. *Dans la partie II de l’exercice, on considérera la distance d’un point M à* ***un segment [****BC] comme étant la distance du point M à la droite (BC).*	

Partie I

Soit C un cercle de centre O, A un point de ce cercle et D le disque délimité par ce cercle.



1. Reproduire la figure, et représenter l'ensemble des points du disque équidistants de O et de A.

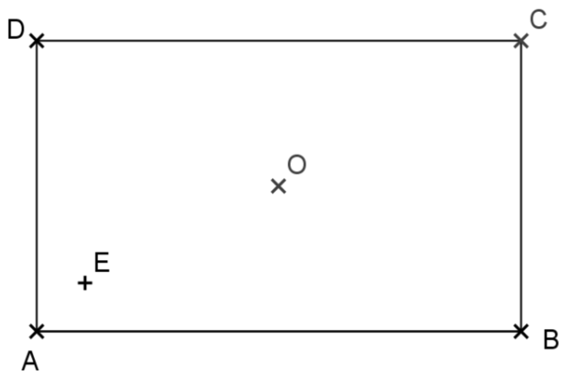
2. Hachurer l'ensemble des points du disque plus proches de O que de A.

3. Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable sur la surface du disque D.

Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de A ?

Partie II

Soit ABCD un rectangle de longueur AB = 20 cm et de largeur BC = 12 cm, de centre O.
Soit E un point situé à l'intérieur du rectangle, proche de A, à 2 cm de chaque bord (comme sur la figure ci-après, qui n'est toutefois pas à l'échelle).
Soit M un point déterminé aléatoirement de manière équiprobable à l'intérieur du rectangle ABCD.



1. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AD] ?

2. ***a.*** Reproduire le rectangle, et représenter l'ensemble des points intérieurs au rectangle et équidistants des côtés [AB] et [BC].

b. Hachurer l'ensemble des points intérieurs au rectangle et plus proches du côté [BC] que du côté [AB].

c. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [BC] que du côté [AB] ?

3. Quelle est la probabilité que M soit plus proche du côté [AB] que des trois autres côtés [BC], [CD] et [DA] ?

4. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que de E ?

5. Quelle est la probabilité que M soit plus proche de O que des quatre sommets A, B, C et D ?

EXERCICE 3 - Académique

I – Un premier algorithme

Voici un algorithme applicable à des nombres de trois chiffres dont le chiffre des centaines n'est pas égal à celui des unités :

Étape 1 : Inverser l'ordre des chiffres (par exemple : 275 devient 572).

Étape 2 : Calculer la différence du plus grand et du plus petit de ces deux nombres.

Étape 3 : Réitérer l'étape 1 sur le nombre obtenu.

Étape 4 : Additionner ces deux derniers nombres.

1. ***a)*** Appliquer l'algorithme aux nombres 123, 448 et 946.

b) Que peut-on conjecturer ?

2. Pour implémenter cet algorithme, l'étape 2, implicite lorsqu'on effectue les calculs « à la main », nécessite de dissocier l'entier saisi afin d'en isoler le chiffre des unités, celui des dizaines puis celui des centaines.

Compléter l'algorithme suivant dont le rôle est d'effectuer cette dissociation. Dans cet algorithme a est le chiffre de centaines, b celui des dizaines et c celui des unités du nombre n que l'on souhaite décomposer.

Entrée :
  n est un entier naturel
Initialisation :
  Donner à a la valeur 0
  Donner à b la valeur 0
  Donner à c la valeur 0
Traitement :
  Tant que $n \geq 100$
    Affecter à a la valeur $a + 1$
    Affecter à n la valeur $n - 100$
  Fin Tant que
  Tant que n ……………………….
    Affecter à b la valeur …………
    Affecter à .... la valeur ………..
  Fin Tant que
  Affecter à c la valeur …………….
Sortie :
  Afficher a
  Afficher b
  Afficher c

3. On se propose maintenant de démontrer la conjecture établie en **1.b)**.

Pour cela, on choisit un nombre de trois chiffres que l'on écrit abc où a, b et c sont donc des entiers compris entre 0 et 9 et représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.

On peut, sans perdre de généralité, supposer $a < c$.

***a*)** Décomposer *abc* selon les puissances de 10.

***b*)** Donner le nombre obtenu après l'étape 1 sous sa forme décomposée.

c) Montrer que le nombre obtenu après l'étape 2 peut s'écrire : $(c - a - 1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + a - c$.

***d*)** Appliquer les étapes 3 et 4 et conclure.

II – L'algorithme de Kaprekar

En mathématiques, l'algorithme de Kaprekar est un algorithme découvert en 1949 par le mathématicien indien D.R. Kaprekar pour les nombres entiers de quatre chiffres, mais qui peut être généralisé à tous les nombres entiers. Nous l'étudierons ici pour des nombres entiers de trois chiffres, tous ces chiffres étant distincts.

L'algorithme de Kaprekar consiste à associer à un nombre entier quelconque n un autre nombre K(n) généré de la façon suivante :

Étape 1 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus grand nombre possible. On le note G.

Étape 2 : À partir des chiffres qui composent n, former le plus petit nombre possible. On le note P.

Étape 3 : K(n) est alors égal à la différence $G - P$.

Par exemple, partant de 539, on a $G = 953$ et $P = 359$ donc K(539) = 953 – 359 = 594.

1. ***a*)** Calculer K(198), K(357) et K(495).

***b*)** Ecrire un algorithme dont l'entrée est un nombre n à trois chiffres tous distincts et dont la sortie est K(n). Pour la séparation des chiffres des unités, des dizaines et des centaines, on pourra reprendre l'algorithme de la partie **I**.

2. Appliquer l'algorithme de Kaprekar en partant du nombre 198 et en itérant autant de fois que nécessaire. Recommencer avec d'autres nombres à trois chiffres tous distincts. Que peut-on conjecturer ?

3. On se propose de démontrer la conjecture émise à la question **2**.

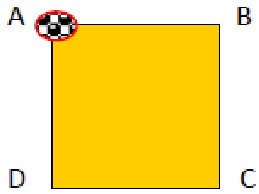
Pour cela, on choisit un entier n composé de trois chiffres et que l'on écrit *abc* où a, b et c sont donc des entiers tous distincts compris entre 0 et 9 qui représentent respectivement le chiffre des centaines, le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de n.

***a*)** Expliquer pourquoi on peut, sans perdre de généralité, supposer que $a < b < c$.

***b*)** Montrer que K(n) = 99($c - a$).

***c*)** Démontrer la conjecture et préciser le nombre maximum d'itérations nécessaires.

EXERCICE 4 - Académique



Une coccinelle se déplace sur les côtés d'un carré ABCD en partant du point A.
Elle peut marcher à rebours si elle le souhaite.

On appelle déplacement tout trajet de la coccinelle le long d'un côté du carré.

Une marche est constituée de déplacements, ainsi, $A \to B \to A \to D \to C$ est une marche de quatre déplacements dont l'arrivée est le point C.

Partie A

Dans cette partie, la coccinelle se déplace de manière aléatoire sur les côtés d'un carré ABCD et l'on considère que tous ses déplacements sont équiprobables.

1. ***a)*** La coccinelle peut-elle atteindre le point B en trois déplacements ?

b) Quelles sont les arrivées possibles pour une marche de trois déplacements ?

c) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre pair de déplacements ?

d) Quelles sont les arrivées possibles si la marche compte un nombre impair de déplacements ?

2. Dans cette question, la coccinelle effectue deux déplacements.

Eventuellement à l'aide d'un arbre, calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

3. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la coccinelle arrive en A					

Partie B

Dans cette partie, la coccinelle se déplace toujours sur les côtés du carré ABCD en partant du point A mais elle a deux fois plus de chance de se déplacer verticalement qu'horizontalement. Elle peut toujours marcher à rebours si elle le souhaite.

En revanche, elle décide de s'arrêter dès qu'elle revient en A.

1. Dans cette question, la coccinelle effectue exactement deux déplacements.

a) Calculer la probabilité de l'événement A_2 : « la coccinelle arrive en A en effectuant deux déplacements ».

b) Calculer la probabilité de l'événement C_2 : « la coccinelle arrive en C en effectuant deux déplacements ».

2. ***a)*** Calculer la probabilité de l'événement A_4 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement quatre déplacements ».

b) Calculer la probabilité de l'événement A_6 : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement six déplacements ».

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

a) On note A_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements » et $P(A_{2n})$ la probabilité de cet événement. Exprimer $P(A_{2n})$ en fonction de n.

Soit q un nombre réel différent de 1 et n un nombre entier naturel non nul. On rappelle que :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

b) On note G_{2n} l'événement : « la coccinelle arrive en A en effectuant au maximum $2n$ déplacements ». Exprimer en fonction de n la probabilité de G_{2n} notée $P(G_{2n})$.

c) Quel est le plus petit entier n tel que $P(G_{2n}) \geq 0{,}9999$?