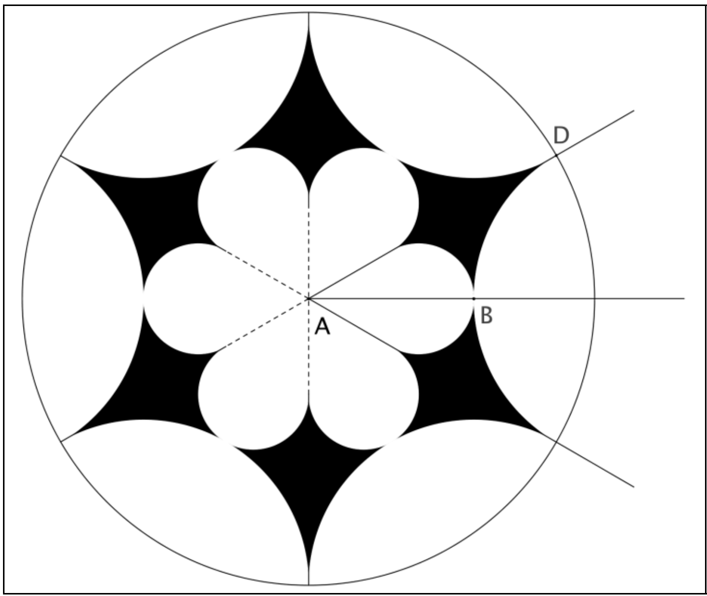
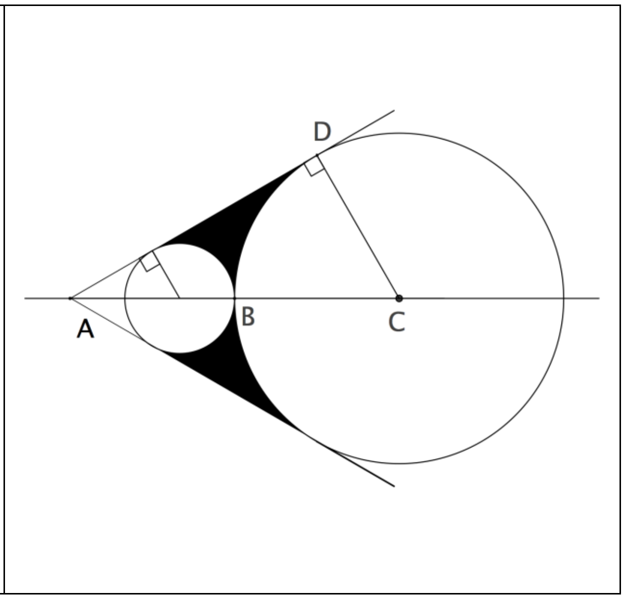
Exercice 1 National : ***La Rosace***

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.

Rosace



Motif :



1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?

2. *a*. Montrer que $AB = BC$.

   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?

   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon $3\sqrt{3}$.

   Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?

3. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

<u>Exercice 2 National :</u> ***À la recherche du « chaînonze ».***

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car 7 + 9 – 5 = 11 et 0 + 9 – 9 = 0.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter **à droite** de la chaîne « 7 5 9 4 » pour la prolonger en un chaînonze ?

2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres.
   Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le 2010^{e} chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de *n* chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « *a b* » où *a* et *b* sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de **trois** chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.

   a. Etudier le cas particulier « *a a* ».

   b. Etudier le cas $b = a - 1$.

   c. Etudier les autres cas.

5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « *a b* » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

<u>Exercice 3 Académique</u> : ***Puzzle***

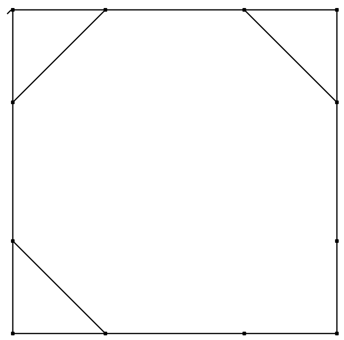
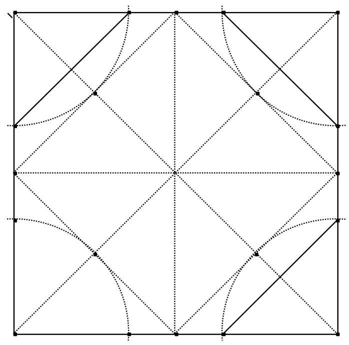
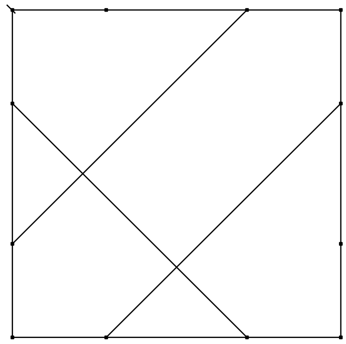
		

Figure 1	Figure 2	Figure 3

Dans un carré donné, on découpe à chaque sommet un triangle rectangle isocèle comme l'indique la figure 1. Tous les triangles rectangles isocèles ont les mêmes dimensions.

1) Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré ?

2)
   a) Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente le quart de l'aire totale du carré ?
   b) Observer alors la figure 2 et expliquer pourquoi elle permet de construire facilement à l'aide d'un compas la solution de cette question.

3) Lorsqu'on a découpé les quatre triangles rectangles, la figure qui subsiste, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, est un octogone (figure à huit côtés). Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'octogone final soit régulier (c'est-à-dire une figure inscriptible dans un cercle dont les huit côtés sont égaux).

A présent, on considère le puzzle de la figure 3, constitué d'un carré central, de quatre triangles de mêmes dimensions et de quatre pentagones de mêmes dimensions.

4) Comment procéder pour que l'aire de chacun des quatre pentagones soit égale à l'aire du carré central ? Dessiner alors la solution en choisissant bien le côté du carré initial.

<u>Exercice 4 Académique</u> : ***Développement égyptien d'une fraction***

Dans l'antiquité, les Egyptiens n'utilisaient que des fractions dont le numérateur était 1, comme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{13}$ ….

Ils pouvaient décomposer toute autre fraction (comme $\frac{31}{13}$) en somme d'un entier et de fractions de ce type selon l'algorithme suivant :

- on calcule le quotient entier de 31 par 13 : on obtient 2
- on calcule alors : $\frac{31}{13} - 2 = \frac{5}{13}$
- le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{5}{13}$ est 3, et $\frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{2}{39}$;
- le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{2}{39}$ est 20, et $\frac{2}{39} - \frac{1}{20} = \frac{1}{780}$.

Ainsi, $\frac{31}{13} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$ est le « développement égyptien » de $\frac{31}{13}$.

On admettra que cette écriture existe et est unique.

1 Déterminer le développement égyptien des fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{18}{7}$ et $\frac{2009}{2010}$.

2 L'écriture $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

3 Soient a et b deux entiers naturels tels que $2 \leq a < b$.

À quelle condition l'écriture $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

4 Déterminer le plus petit entier $n \geq 11$ tel que $\frac{1}{11} + \frac{1}{n}$ est un développement égyptien.