

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2005  
ACADEMIE DE BESANCON

DUREE : 4 heures

Les quatre exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre voulu.  
Les calculatrices sont autorisées.

*Recommandations*

*Il est important d'argumenter ses propositions.  
Même s'il n'aboutit pas à la solution complète d'une question, le candidat est invité à décrire sa démarche, un résultat même partiel pouvant avoir son intérêt.  
De même, si un candidat découvre une erreur dans ses résultats ou sa démarche, il est bon, s'il s'en rend compte, qu'il le signale et, si possible, l'explique.*

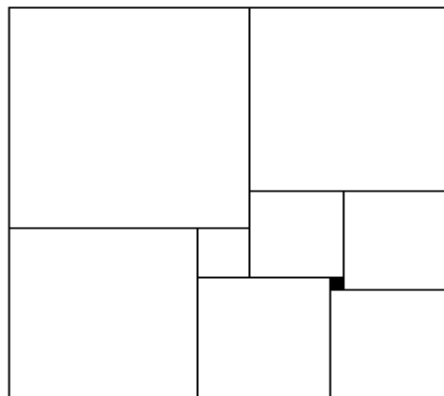
*Corrigés*

*Vous pourrez consulter les corrigés de ces exercices prochainement en vous connectant à*

<http://catice.ac-besancon.fr/Mathematiques/Olympiades-1S>.

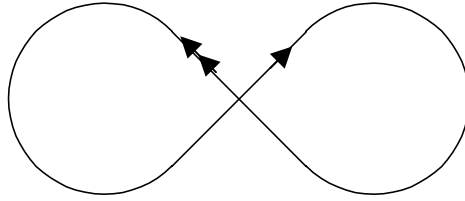
**Un pavage**

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.  
Quelles sont les dimensions du rectangle ?



### Le lièvre et la tortue

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre).

Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne.

Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

### Un libraire expert en comptabilité

Un ami libraire avait acheté un stock de stylos par lots de 5 et avait pu obtenir un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il avait acheté 5 € le lot de 5 stylos et 20 € le lot de 5 stylos plumes.

Il les revendit à l'unité en faisant un bénéfice de 20% sur chaque stylo vendu et de 25% sur chaque stylo plume.

Un soir en faisant le bilan de son stock et sa comptabilité, il se rendit compte qu'il était exactement rentré dans ses frais alors qu'il lui restait 504 pièces en stock dont peu de stylos, en tout cas moins de cinquante.

Combien de stylos avait-il acheté à son fournisseur ?

### Le parc du château

1) Trois points distincts A,B,C sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur a. On veut démontrer que l'aire du triangle (A,B,C) est inférieure ou égale à  $\frac{a^2}{2}$ .

- Démontrer ce résultat dans le cas particulier où le côté [BC] du triangle est parallèle à un des côtés du carré.
- Démontrer le résultat dans le cas général. (On pourra s'aider du cas particulier.)

2) Le parc d'un château occupe une surface carrée de 120 m de côté. Dans ce parc sont plantés 73 arbres.

- Montrer que trois des arbres sont les sommets d'un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m<sup>2</sup>.
- Le châtelain souhaite construire une fontaine de telle sorte que celle-ci soit située à moins de 15 m de trois arbres de son parc. Est-ce possible ? Justifier.