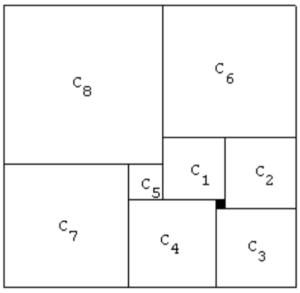
OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2005

ACADEMIE DE BESANCON

CORRIGE

Un pavage : une solution



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit (carré C_1).
Si ce carré C_1 a pour côté **c**, le carré C_2 a pour côté **c + 1**, et le carré C_3 a pour côté **c + 2**.
Le carré C_4 a pour côté **c + 3**.
(A chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté **1**)
Ceci permet de déduire que le carré C_5 pour côté **4**. Quant au carré C_6 il a pour côté **2c + 1**.
On obtient qu'une des dimensions du rectangle initial est :

$$(2c + 1) + (c + 1) + (c + 2) = 4c + 4.$$

Le carré C_7 a pour côté **c + 3 + 4** = **c + 7**. Donc l'autre dimension du rectangle initial est :

$$(c + 7) + (c + 3) + (c + 2) = 3c + 12.$$

Le dernier carré C_8 a pour côté **c + 7 + 4 =c + 11**.
Finalement deux côtés opposés du rectangle ont pour dimensions :

$$4c + 4 \text{ et } (c + 7) + (c + 11) = 2c + 18$$

Les deux côtés étant de même longueur, on a **4c + 4** = **2c + 18** ce qui donne **c** = **7**.
En conclusion, le rectangle initial a pour dimensions **32u et 33u**.

Le lièvre et la tortue

Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi-circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi-circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ». Au second demi-circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi-circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.

$2005=11\times182+3$

Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements.

Un libraire expert en comptabilité

Notons n le nombre de lots de stylos achetés.
Ainsi le libraire a acheté $5n$ stylos et $5n$ stylos plumes
Notons x le nombre de stylos non vendus
Ainsi le libraire a pour invendus x stylos et $(504 - x)$ stylos plumes
Il a acheté 1 € chaque stylo et le revend 1.20 €.
Il a acheté 4 € chaque stylo plume et le revend 5 €
L'équation traduisant l'équilibre de ses comptes s'écrit donc :

$$1.20\,(5n - x) + 5\,(5n - 504 + x) = 1 \times 5n + 4 \times 5n$$

Soit après simplification :

$$30\,n + 19\,x = 12600$$

On peut résoudre par tâtonnement ou remarquer que 30 et 12600 étant multiples de 10 (et même de 30), x sera aussi multiple de 10 (et même de 30).
La seule solution est donc, compte tenu de $0 < x < 50$:

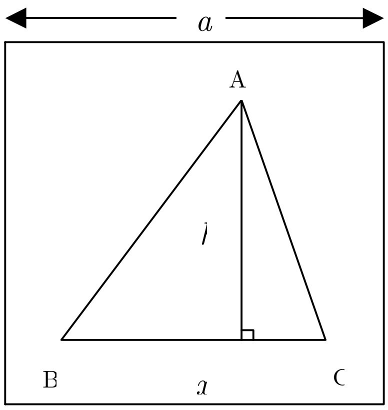
$x = 30$ d'où on trouve $n = 401$

Le libraire a donc acheté $\boxed{\text{2005 stylos}}$.

Le parc du château

Question 1) a) :

Soit S l'aire du triangle (A,B,C), x la longueur du segment [BC] et h la hauteur du triangle (A,B,C) issue du point A. On a : $S = \dfrac{hx}{2}$. Or $x \le a$ et $h \le a$, donc : $S \le \dfrac{a^2}{2}$.

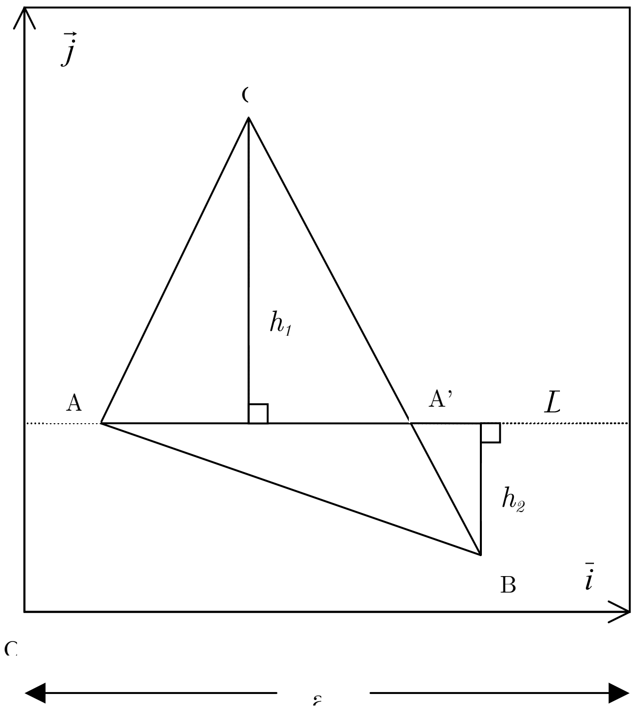


Question 1) b) :

On suppose qu'aucun des trois côtés du triangle (A,B,C) n'est parallèle à un des quatre côtés du carré. Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, les trois points A, B, C ont donc des ordonnées distinctes.
On note A, B et C les trois sommets du triangle de telle sorte que, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'ordonnée du point A est strictement comprise entre celles de B et C.
Soit D la droite passant par A, de vecteur directeur $\vec{i}$. Les points B et C sont situés de part et d'autre de la droite D. Donc, le segment [BC] coupe cette droite en un point A'.
On note S, S_1 et S_2 les aires respectives des triangles (A,B,C), (A,A',C) et (A,A',B).

Soient h_1 et h_2 les hauteurs respectives des triangles (A,A',C) et (A,A',B), issues des points C et B. Enfin, soit x la longueur du segment [AA']. On a : $S_1 = \frac{xh_1}{2}$ et $S_2 = \frac{xh_2}{2}$. Donc :

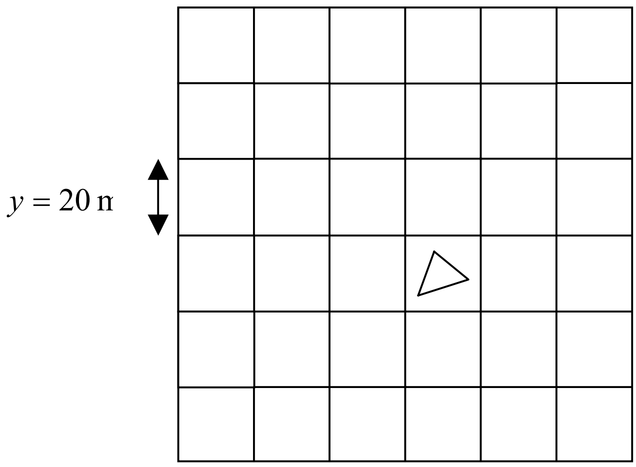
$S = S_1 + S_2 = \frac{x(h_1 + h_2)}{2}$. Or : $x \leq a$ et $h_1 + h_2 \leq a$. Donc : $S \leq \frac{a^2}{2}$.



Question 2) a) :

On découpe le parc en 36 carrés de longueur $y = 20\,\text{m}$. Comme $73 = 2 \times 36 + 1$, on en déduit, par le principe des tiroirs, qu'au moins l'un des 36 carrés contient au moins trois arbres. Soit S' l'aire du triangle formé par ces trois arbres. D'après la première question, on a :

$S' \leq \frac{y^2}{2} = 200\,\text{m}^2$.



Question 2) b) :

D'après la question précédente, un des 36 carrés contient trois arbres formant un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m^2. On note A, B, C ces trois arbres et I le centre du carré qui les contient.

La longueur de la diagonale du carré est égale à : $d = y\sqrt{2}$ m.

Les trois distances IA, IB et IC sont inférieures ou égales à $\dfrac{d}{2} = \dfrac{y}{\sqrt{2}} \approx 14{,}1\ \text{m}.$ Le châtelain peut donc construire sa fontaine au point I, elle sera bien à moins de 15 m de 3 arbres de son parc.