<u>Exercice 1 : Correction (proposée par l'académie d'Amiens)</u>

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2. *a*. <u>Première méthode :</u>
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\mathrm{CAD}=30°$. Donc $\mathrm{BCD}=60°$.
   Et puisque $\mathrm{BC}=\mathrm{DC}$, le triangle BCD est donc équilatéral.
   Ensuite, $\mathrm{BDA}=30°$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $\mathrm{BD}=\mathrm{BA}$.
   Finalement, on trouve bien $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$.
   <u>Deuxième méthode :</u>
   On note R le rayon du grand cercle.
   On applique une formule de trigonométrie : $\sin\mathrm{DAC}=\dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}$, d'où $\sin 30°=\dfrac{R}{\mathrm{AC}}$.
   Puisque $\sin 30°=\dfrac{1}{2}$, on obtient $\mathrm{AC}=2R$.
   Or $\mathrm{BC}=R$, d'où $\mathrm{AB}=R$. Finalement $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}$.

   b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
   En appliquant le résultat précédent, il vient que $\mathrm{AE}=2r$. De plus, $\mathrm{EB}=r$.
   On obtient donc $\mathrm{AB}=3r$, c'est-à-dire $R=3r$.
3. On doit avoir $\mathrm{AD}=3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2-R^2}=3\sqrt{3}$, d'où $R=3$. Puis $r=1$.
4. Si $r=\dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

   D'autre part, on a : $R=3r=\dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$.

   La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur BEF (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur BCD.

   Cette surface vaut donc $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3}-\dfrac{\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^2}{6}=\sqrt{3}-\dfrac{11\pi}{24}$.

   Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3}-\dfrac{11\pi}{2}$.

<u>Exercice 2 : Correction (proposée par Nancy-Metz)</u>

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».

2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 … ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2010 divisible par 6, donc le 2010^{e} terme est 2.

3. Pour « 0 9 » on obtient « 0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 0 9 ». La chaîne « 0 9 9 0 2 2 » se répète constamment.
   Pour « 9 1 » on obtient « 9 1 3 2 » et le chaînonze est « bloqué » car les équations $3 + x - 2 = 0$ et $3 + x - 2 = 11$ admettent comme solutions -1 et 10 qui ne sont pas des chiffres.

4. On trouve :
   a. Si $b = a$, le prolongement est « $a\ b\ 0$ ».
   b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.
   c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « $a\ b\ (11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.
   d. Si $a < b$, « $a\ b\ (b - a)$ » avec $b - a$ est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.
   Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$) soit unique.

5. **1er cas : si $a = b$**
   Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 ... » le chaînonze est 1-périodique donc a fortiori 6-périodique.
   Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
   Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « $a\ a\ 0\ (11 - a)\ (11 - a)\ 0\ a\ a$ ... » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.
   2^{e} cas : $a = b + 1$
   la chaîne se bloque et est de longueur 2.
   3^{e} cas : $a = 0$ et $b = 1$
   « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.
   4^{e} cas : $0 < a < b$,
   « $a\ b\ (b - a)\ (11 - a)\ (11 - b)\ (11 + a - b)\ a\ b$ » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si
   - $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
   - $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

   5^{e} cas : Si $b = 0$ et $a > 1$
   le prolongement est « $a\ 0\ (11 - a)\ (11 - a)\ 0\ a$ » et le chaînonze est infini.
   6^{e} cas : Si $a > b + 1 > 1$

« a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figure 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6 périodiques.

a \ b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

Exercice 3 Académique **:** ***Puzzle***

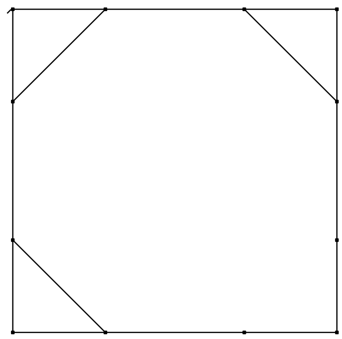
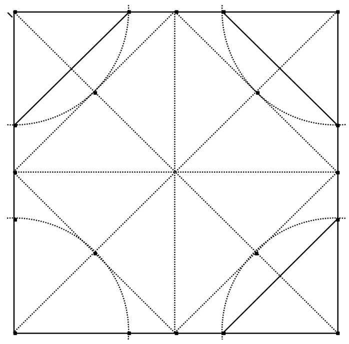
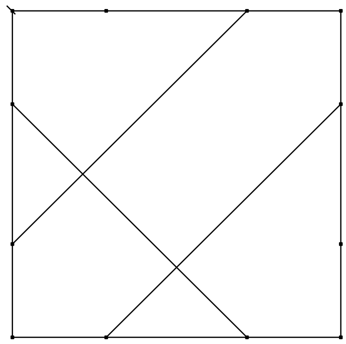
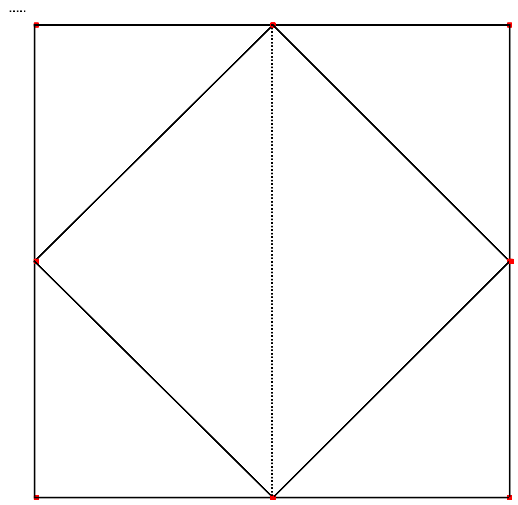
		

Figure 1	Figure 2	Figure 3

1) Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré ?



Notons ***a*** le côté du carré

Si le petit côté des triangles rectangles isocèles mesure $\boxed{\frac{a}{2}}$ (cf figure à gauche), il est clair pour des raisons de symétrie que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré.

2)

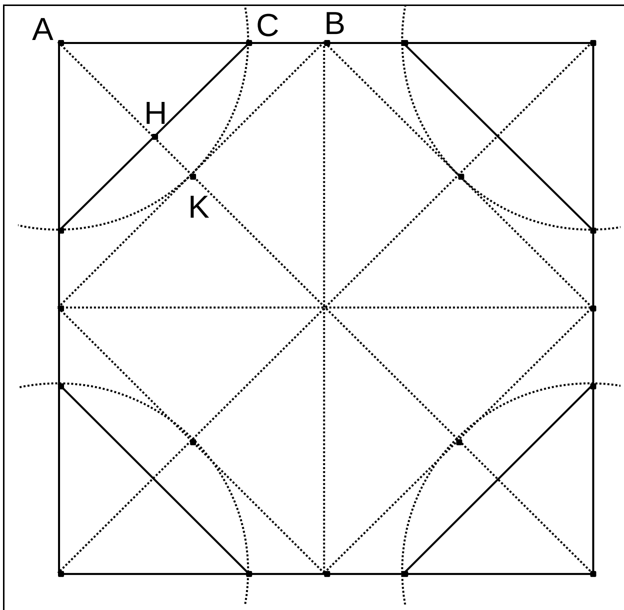
a) Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente le quart de l'aire totale du carré ?

Notons ***x*** le côté de chaque triangle rectangles isocèles. En accolant deux tels rectangles isocèles par leur hypoténuse, on obtient un carré de côté ***x***, donc d'aire x^2.

La somme des aires des quatre triangles rectangles isocèles sera donc : $2x^2$.

On doit donc avoir ici $2x^2 = \frac{a^2}{4}$, soit $x^2 = \frac{a^2}{8}$, soit $\boxed{x = \frac{a\sqrt{2}}{4}}$

b) Observer alors la figure 2 et expliquer pourquoi elle permet de construire facilement à l'aide d'un compas la solution de cette question.



Notons les points comme sur la figure ci-contre.

Il est clair par le théorème de Pythagore que

$$AK^2 + AK^2 = AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

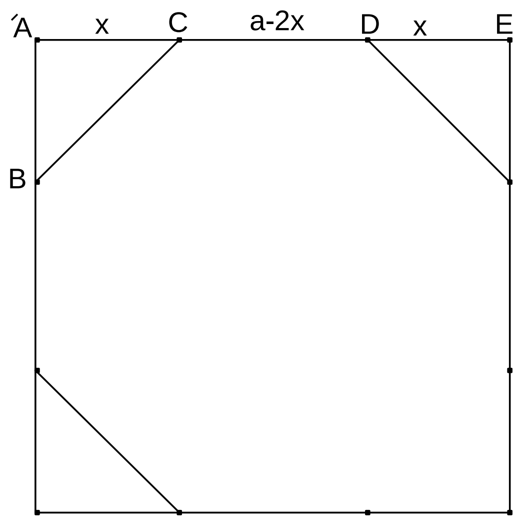
soit $2AK^2 = \frac{a^2}{4}$ soit $AK = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

et par construction : $AC = AK$.

Le côté AC du triangle rectangle isocèle a donc bien la longueur attendue.

3) Lorsqu'on a découpé les quatre triangles rectangles, la figure qui subsiste, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, est un octogone.

Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'octogone final soit régulier.



Notons les points et les longueurs comme sur la figure de gauche (avec $AE = a$).

Il est clair par le théorème de Pythagore que

$$BC^2 = 2x^2 .$$

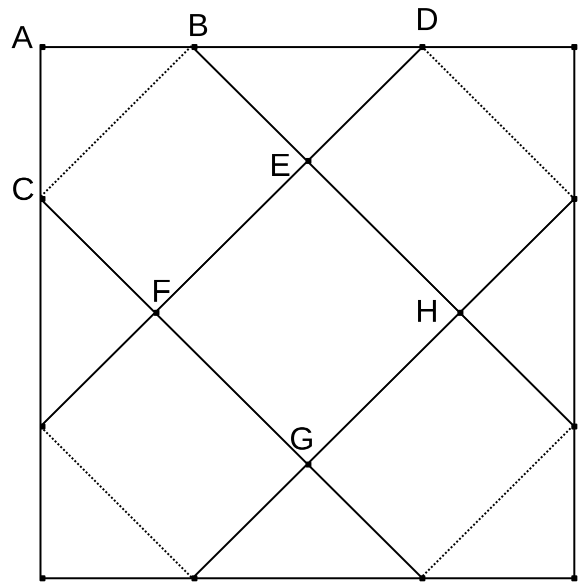
De plus $CD^2 = (a-2x)^2$.

On résout donc $(a-2x)^2 = 2x^2$, soit compte tenu de la positivité de x et de $(a-2x)$: $(a-2x) = x\sqrt{2}$ soit :

$$\boxed{x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a \approx 0.3 \times a}$$

A présent, on considère le puzzle de la figure 3, constitué d'un carré central, de quatre triangles de mêmes dimensions et de quatre pentagones de mêmes dimensions.

4) Comment procéder pour que l'aire de chacun des quatre pentagones soit égale à l'aire du carré central ? Dessiner alors la solution en choisissant bien le côté du carré initial.



La somme des aires des quatre triangles rectangles type BED est égale à l'aire d'un carré de côté BD, soit $\left(a-2x\right)^2$.

L'aire du carré central EFGH est égale à $BC^2 = 2x^2$.

L'aire d'un pentagone est alors par soustraction :

$$\frac{1}{4}\left[a^2-\left(a-2x\right)^2-2x^2\right]=ax-\frac{3}{2}x^2$$

On résout donc $2x^2 = ax - \frac{3}{2}x^2$; on obtient après simplification par x : $\boxed{x = \frac{2}{7}a}$ ce qui est tout à fait remarquable.

Il suffit de prendre $\boxed{a = 7cm}$ comme côté du grand carré pour faire la construction, puis $\boxed{x = 2cm}$ comme longueur du segment AB.

<u>Exercice 4 Académique</u> : ***Développement égyptien d'une fraction***

Dans l'antiquité, les Egyptiens n'utilisaient que des fractions dont le numérateur était 1, comme $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{13}$ …. Ils pouvaient décomposer toute autre fraction (comme $\frac{31}{13}$) en somme d'un entier et de fractions de ce type selon l'algorithme suivant :

- on calcule le quotient entier de 31 par 13 : on obtient 2
- on calcule alors : $\frac{31}{13} - 2 = \frac{5}{13}$
- le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{5}{13}$ est 3, et $\frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{2}{39}$;
- le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{2}{39}$ est 20, et $\frac{2}{39} - \frac{1}{20} = \frac{1}{780}$.

Ainsi, $\frac{31}{13} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$ est le « développement égyptien » de $\frac{31}{13}$.

On admettra que cette écriture existe et est unique.

1 <u>Déterminer le développement égyptien des fractions</u> $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{18}{7}$ et $\frac{2009}{2010}$.

On obtient par l'algorithme ci-dessus $\boxed{\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}$, $\boxed{\frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}}$, $\boxed{\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}}$.

Pour $\frac{2009}{2010}$, les calculs sont plus longs !

La question était dure mais les premiers calculs effectués nous donnent déjà satisfaction…

Avec une calculatrice on obtient successivement :

$$\frac{2009}{2010} = \frac{1}{2} + \frac{502}{1005} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{167}{1005} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{164}{7035} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{17}{302505}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{17795} + \frac{2}{1076615295}$$

et pour réduire $\frac{2}{1076615295}$, une jolie astuce, comme le plus petit entier n tel que

$\frac{1}{n}$ „ $\frac{2}{2p+1}$ est $p+1$ et que $\frac{2}{2p+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{2p+1 \quad p+1}$,

il vient avec $p = 538\,397\,647$: $\frac{2}{1076615295} = \frac{1}{538\,397\,648} + \frac{1}{1076615295 \times 538\,397\,648}$

Finalement : $\boxed{\frac{2009}{2010} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{17795} + \frac{1}{538\,397\,648} + \frac{1}{1076615295 \times 538\,397\,648}}$.

On ne pouvait faire mieux avec une calculatrice usuelle.

Pour ceux qui ont repris le calcul avec un ordinateur :

$$\boxed{\frac{2009}{2010}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{17795}+\frac{1}{538\,397\,648}+\frac{1}{579550247252276160}}$$

Ouf !

2 L'écriture $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

Non car $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ et comme $\frac{8}{15}=\frac{1}{2}+\frac{1}{30}$ est le développement égyptien de $\frac{8}{15}$ d'après la première question, comme enfin l'énoncé annonce que la décomposition égyptienne est unique, $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$ ne peut être le développement égyptien d'une fraction.

3 Soient a et b deux entiers naturels tels que $2 \leq a < b$. À quelle condition l'écriture $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?

Il suffit que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a-1}$; en effet, comme $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{a-1}$, a est bien le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ ($a-1$ ne convient pas !)

4 Déterminer le plus petit entier $n \ldots 11$ tel que $\frac{1}{11}+\frac{1}{n}$ est un développement égyptien.

On se sert de la question précédente : résolvons donc $\frac{1}{11}+\frac{1}{n}>\frac{1}{10}$.

Il vient successivement $\frac{1}{n}>\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=\frac{1}{110}$ donc $n>110$. Le plus petit entier qui convient est donc $\boxed{111}$.

Ainsi $\boxed{\frac{1}{11}+\frac{1}{111}}$ est le développement égyptien d'une fraction, après calcul de $\frac{122}{1221}$