Éléments de correction :

Exercice 1 :

Partie A

1. **1-** Plus petite valeur : 6 (=1 + 2 + 3)
2. **2-** Plus grande valeur : 24 (= 7 + 8 + 9)

Partie B :

1. Triangle 20-magique :

2
7 1
6 9
5 3 4 8

2. a. $3S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_7 + n_8 + n_9 + n_1 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+T$

b. $\frac{6+45}{3} \leq S \leq \frac{24+45}{3}$ (cf. partie A)

c. (17,6) (18,9) (19,12) (20,15) (21,18) (22,21) (23,24)

3. Triangle 17-magique :

1
8 4
6 9
2 5 7 3

4. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$.
Aucun des trois nombres n_1, n_4, n_7 n'est 9. 9 serait donc un des six autres nombres.
Considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 9. On peut supposer par exemple que $n_2 = 9$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 18$, d'où
$n_1 + n_3 + n_4 = 9$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 9$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
Il n'existe donc pas de triangle magique tel que $S = 18$.
(On peut aussi envisager toutes les possibilités.)

5. a. Supposons qu'un tel triangle existe, alors $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$.
Supposons que 7 ne soit pas sur l'un des sommets et considérons le côté du triangle sur lequel se situe le nombre 7. On peut supposer par exemple que $n_2 = 7$. On aurait alors, $S = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 19$, d'où $n_1 + n_3 + n_4 = 12$. Or, $T = n_1 + n_4 + n_7 = 12$. Par suite, $n_3 = n_7$, ce qui est exclu.
7 est donc nécessairement situé sur l'un des sommets du triangle.

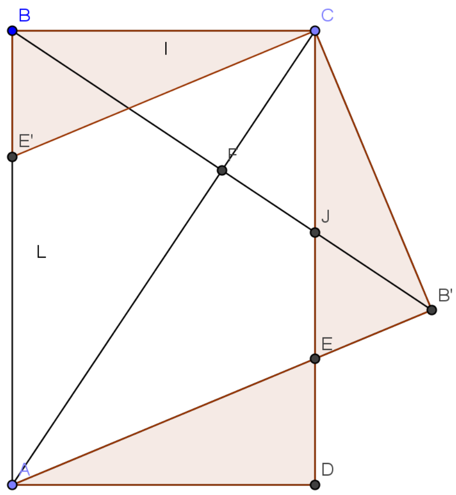
b. Triangle 19-magique

7
4 1
5 9
3 8 6 2

6. Il suffit de remplacer chaque n_i par $10 - n_i$; les sommes sont alors remplacées par $40 - S$ et les $10 - n_i$ sont deux à deux distincts et compris entre 1 et 9.

7- Les valeurs de S pour lesquelles ont peut trouver un triangle *S*-magique sont : 17, 19, 20 (trouvées dans les questions précédentes) et 23, 21 (d'après la question précédente).
Il n'y a pas de triangle 18-magique, et donc pas non plus de triangle 22-magique.

Exercice 2 :



2. Sachant que AE’CE est un losange on a : $(16-c)^2+8^2=c^2$ soit $c = 10$

3. On a nécessairement : $(L-7{,}5)^2+l^2=7{,}5^2$ avec $L \geq 8$

soit : $l^2 = L(15-L)$

d’où les seules réponses entières : L=12 et l=6. Et ces deux dimensions conduisent bien à un losange de côté 7,5 cm.

4. Sachant que AE’CE est un losange, on a ED=E’B donc les triangles rectangles BCE’ et AED sont isométriques. La somme de leurs aires est égale à 25% de l’aire du rectangle.

D’où l’égalité : $(L-c)l = 0{,}25Ll$ d’où $c = 0{,}75L$ d’où $L^2 = 2l^2$ d’où $l = \dfrac{\sqrt{2}}{2}L$

5. Le pliage correspond à une symétrie axiale d’axe (AC).
Notons B’ l’image de B et E l’intersection de (AB’) et (CD) (qui sont sécantes) et E’ le symétrique de E (E’ est sur (AB) car CBE’ est un triangle rectangle image de CB’E).
La symétrie assure les égalités de longueurs : CE’=CE et AE=AE’
On conclut avec le parallélisme de (CE) et (AE’).

Remarque : Sauf dans le cas où la figure de départ est un carré (identique à la figure d’arrivée, donc un losange), la figure CB’E est bien un triangle extérieur au rectangle ABCD, c'est-à-dire la partie enlevée.
(Il suffirait de dire que FJ < FB’ car le triangle AJC a une aire inférieure au triangle ABC, triangles de même base et donc de hauteurs sont classées dans l’ordre souhaité)

Exercice 3 :

1. Les six nombres admissibles en trois 4 étapes sont :

le nombre 1 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{R} 1$

le nombre 8 : $5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8$

le nombre 4 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{R} 4$

le nombre 14 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14$

le nombre 17 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{R} 17$

le nombre 40 : $5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{M} 20 \xrightarrow{M} 40$

Le raisonnement précédent laisse apparaître aussi les nombres admissibles en 0 étape (5), une étape (2 ; 10) et deux étapes (4 ; 7 ; 20).
Les onze nombres admissibles en moins de 4 étapes sont donc :

$\boxed{1-2-4-5-7-8-10-14-17-20-40}$

2. Les deux chemins suivants donnent la réponse :

$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{R} 13$

$5 \xrightarrow{M} 10 \xrightarrow{R} 7 \xrightarrow{M} 14 \xrightarrow{R} 11 \xrightarrow{M} 22 \xrightarrow{R} 19$

3. Les nombres divisibles par 3 ne sont pas accessibles puisque :
5 n'est pas divisible par 3
en multipliant par 2 un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3
en retranchant 3 à un nombre non divisible par 3, on obtient un nombre non divisible par 3
Ainsi partant d'un nombre non divisible par 3, on ne trouvera sur son chemin (et donc au final) aucun nombre divisible par 3.

4. Un chemin menant de 5 à 2009 :

$$5 \xrightarrow{R} 2 \xrightarrow{M} 4 \xrightarrow{M} 8 \xrightarrow{M} 16 \xrightarrow{M} 32$$

$$\xrightarrow{M} 64 \xrightarrow{M} 128 \xrightarrow{M} 256 \xrightarrow{R} 253$$

$$\xrightarrow{M} 506 \xrightarrow{R} 503 \xrightarrow{M} 1006 \xrightarrow{M} 2012 \xrightarrow{R} 2009$$

Ce chemin a été trouvé par l'algorithme décrit ci-dessous.

Algorithme de création du chemin :

On crée en fait **le chemin inverse** : en partant de N, on obtient un chemin qui mène à 5 de la manière suivante :

- Si n est divisible par 2, son prédécesseur (père) est $n/2$.
  L'opérateur est le réciproque de (M) : $n \xrightarrow{D} n/2$
- Sinon, son prédécesseur est $n+3$
  L'opérateur est le réciproque de (R) : $n \xrightarrow{A} n+3$

Ainsi, pour 2009 ; on obtient successivement :

2009 – 2012 – 1006 – 503 – 506 – 253 – …… – 16 – 8 – 4 – 2 – 5

Exercice 4 :

1. On obtient facilement 7 codes possibles : 630, 611, 440, 431, 421, 333 et 222

2. a En fait le premier a 9 points. Le reste de la poule revient à effectuer une mini-poule entre les 3 autres. On utilise donc les résultats de la première question et on obtient 7 codes possibles : 9630, 9611, 9440, 9431, 9421, 9333 et 9222.

2. b Notons A le joueur classé premier avec 4 points, B, C et D les trois autres..
Il a nécessairement : une victoire (contre B par exemple)
un nul (avec C par exemple)
une défaite (contre D)
A ce stade, le score est : B : 0 C : 1 D : 3.
Il reste les trois matchs : B-C, B-D et C-D à considérer.

D ne peut gagner aucun match (sinon il aurait au moins 6 points) et a au moins une défaite (car avec 2 nuls il totaliserait 5 points).

- ou il perd contre B et contre C ; à ce stade : B : 3 C : 4 D : 3
impossible car il reste à jouer B-C et B ou C va dépasser 4 points au final
- ou il perd contre B et fait nul contre C
à ce stade : B : 3 C : 2 D : 4
le match B-C ne peut plus qu'être nul : on obtient B : 4 C : 3 D : 4
et le code $\boxed{4\ 4\ 4\ 3}$
- ou il perd contre C et fait nul contre B
à ce stade : B : 1 C : 4 D : 4
le match B-C sera alors gagné par B : on obtient B : 4 C : 4 D : 4
et le code $\boxed{4\ 4\ 4\ 4}$

Les deux seuls codes possibles commençant par 4 sont donc $\boxed{4\ 4\ 4\ 3}$ et $\boxed{4\ 4\ 4\ 4}$