Digisibles

1) Essayer chiffre des dizaines, chiffre des unités :
12 ; 15 ou encore 24 ou bien 36 …

2) L'idée est d'utiliser le 1 comme chiffre des milliers. 1000 étant divisible par 2, 4, 8 … on cherche à partir des trois chiffres 2, 4, 8 ; 1248 est divisible par 8 (donc 4 ainsi que 2) convient.

3) a) Le nombre est divisible par 5, son chiffre des unités et 0 ou 5 ; seul 5 est possible.
b) Avec 5 comme chiffre des unités, le nombre est impair, il n'a donc que des diviseur impairs ; tels sont les chiffres de son écriture décimale.
c) Les cinq chiffres impairs peuvent-ils figurer dans l'écriture du nombre ? Si oui, celui-ci s'écrit xyzt5 (x, y, z, t étant des chiffres impairs. Cela fait vingt-quatre nombre éventuels ; la somme des chiffres valant 25, aucun n'est divisible par 3.
c) Le nombre s'écrit xyz5 (x, y, z étant des chiffres impairs. On cherche le plus grand possible … essayer x = 9 etc … Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9735 ne convient pas ; puis 9715 non plus ; 9375 pas plus ; 9315 est digisible. C'est le plus grand s'écrivant avec un 5.

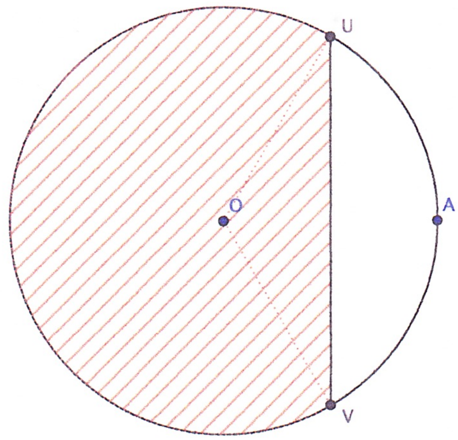
4) La somme des neuf chiffres vaut 45.
a) S'il y a le 5, l'écriture du nombre ne comporte pas plus de quatre chiffres.
S'il n'y a pas le 5, avec huit chiffres, la somme des chiffres vaut 40 ; il est impossible que le nombre soit divisible par 3.
b) Le nombre s'écrit avec sept chiffres, il n'y a donc pas le 5. Il y a le 9.
Les huit chiffres éventuels ont une somme valant 40. Quel chiffre ôter pour que cette somme soit un multiple de 9 ? Il s'agit du chiffre 4.
Un nombre digisible s'écrivant avec sept chiffres dont le 9, comporte exclusivement les chiffres 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9.
c) Pour la recherche du plus grand digisible, on tente avec le 9 … comme chiffre des centaines de mille …
Le plus grand nombre qui puisse être écrit, 9876321, n'est pas pair ; puis le plus grand, 9876312, n'est pas divisible par 7 ; puis 9867312 est divisible par 1, 2, 3, 7, 8, 9. C'est le plus grand nombre digisible.

Plus proche …

Partie I

1) et 2)

On représente le segment [UV] intersection avec le disque de la médiatrice du segment [OA].
On hachure … noter que les points du segment [UV] ne sont pas dans l'ensemble hachuré.

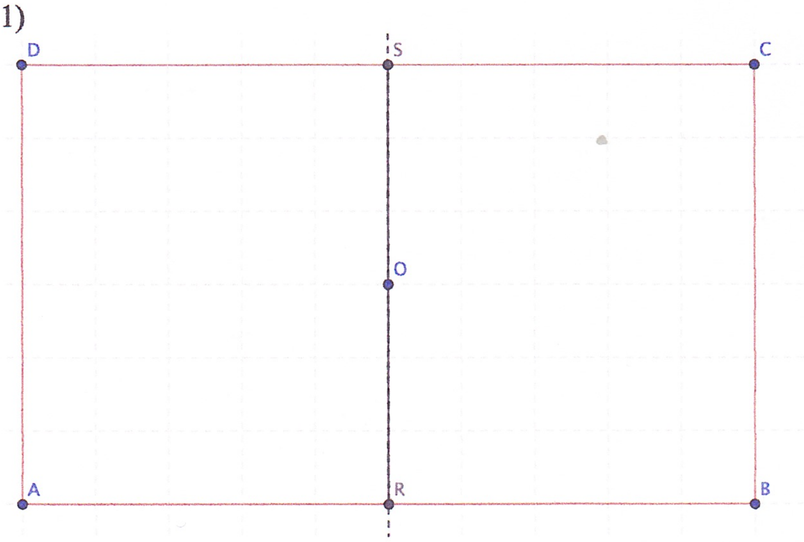


3) Quel est le rapport de l'aire hachurée à celle du disque ?
L'aire du disque (de rayon R) : πR^2 (l'aire d'un secteur d'angle de mesure 360°).
Le secteur angulaire UOV a pour aire le tiers de la précédente.
L'aire de la portion hachurée est la somme des deux tiers de l'aire du disque et de l'aire du triangle OUV ; soit : $\frac{2}{3}\pi R^2 + \frac{1}{4}\sqrt{3}R^2$.

La probabilité : $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{\pi}$; 80,5 % environ.

Partie II

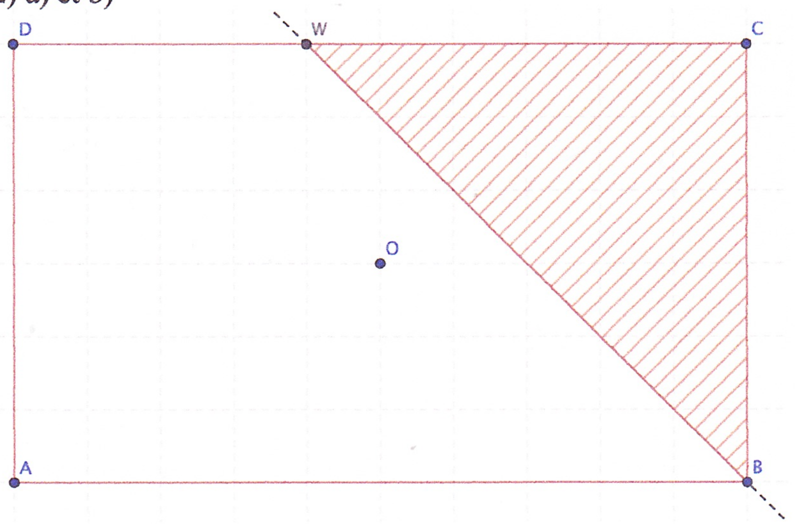
1)



La médiatrice du segment [AB] coupe le segment [AB] en R et le segment [CD] en S . Le segment [RS] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AD].
Le rectangle RBCS est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AD].
Son aire est la moitié de celle du rectangle.

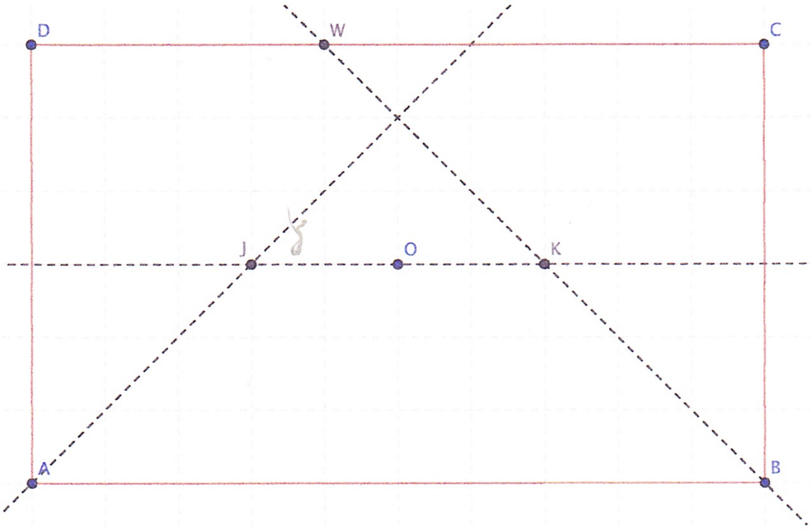
Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %.

2) a) et b)



La bissectrice de l'angle droit en B coupe le segment [CD] en W. Le segment [BW] représente l'ensemble des points du rectangle équidistants du côté [BC] et du côté [AB].
Le triangle BCW (excepté le segment [BW]) est l'ensemble des points plus proches du côté [BC] que du côté [AB].
Son aire : 72 cm^2.
Le rapport de celle-ci à celle du rectangle :
$\frac{3}{10}$; 30 %.

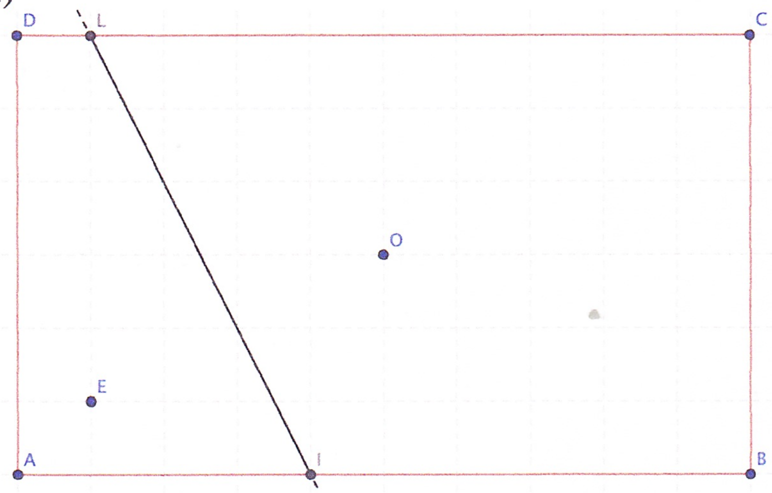
3)



Les bissectrices de l'angle droit en B, de l'angle droit en A, la médiatrice du segment [BC] déterminent le quadrilatère ABKJ qui est l'ensemble des points plus proches du côté [AB] que des trois autres côtés du rectangle (exception faite des côtés [BK], [KJ], [JA].
Son aire : 84 cm^2.

Probabilité : $\frac{7}{20}$; 35 %.

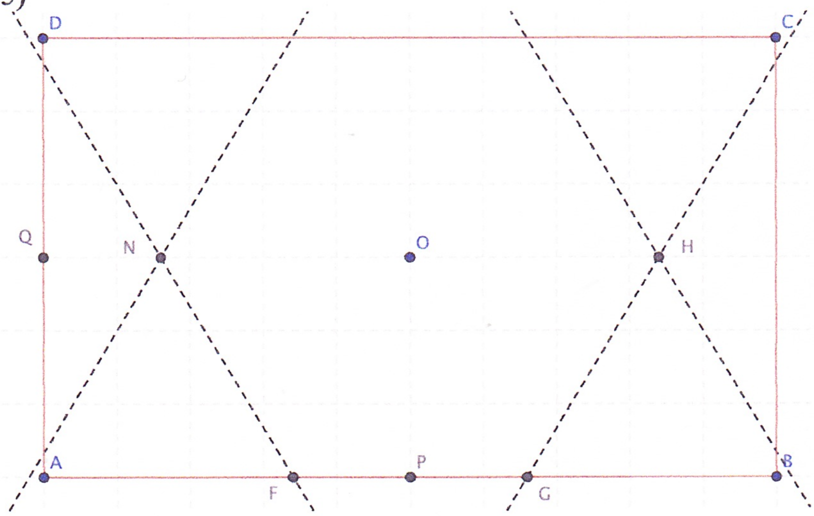
4)



La médiatrice du segment [OE] détermine les points I et L respectivement sur les côtés [AB] et [CD].
Il semble que la longueur AI vaille 8 ; un triangle rectangle (6 sur 2) extrait du quadrillage sur l'hypoténuse EI ainsi que de même sur OI confirme que le point de [AB] à cette distance de A est équidistant de O et de E.
De même DL = 2.
L'aire du trapèze AILD (ensemble des points plus proches de E que de O (exception faite du segment [IL]) vaut : 60 cm^2.

La probabilité : $\frac{3}{4}$; 75 %.

5)



On considère les médiatrices des segments [OA], [OB], [OC] et [OD] qui déterminent un hexagone ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D.
La médiatrice du segment [AO] détermine le point F sur le segment [AB].
Les médiatrices des segments [AO] et [OD] déterminent le point N … situé aussi sur l'axe médian du rectangle (par symétrie du rectangle appliquée aux segments générant les médiatrices …).
Le quadrilatère AFON dont les diagonales ont pour milieu le pied de la médiatrice est un parallélogramme (c'est un losange).
Ce losange a même centre de symétrie que le rectangle APOQ (P et Q milieux respectifs de [AB] et [AD]).
Dans cette symétrie centrale : PFNO et NQAF se correspondent.
L'hexagone, portion du rectangle ensemble des points plus proches de O que des sommets A, B, C, D, a pour aire la moitié de celle du rectangle ABCD.

Probabilité : $\frac{1}{2}$; 50 %. Ce résultat est indépendant de la longueur des côtés du rectangle.

EXERCICE I

Eléments de correction

I – Un premier algorithme

1. **a)** Pour 123, on obtient 321 puis 198 puis 891 et enfin 1089.
Pour 448, on obtient 844 puis 396 puis 693 et enfin 1089.
Pour 946, on obtient 649 puis 297 puis 792 et enfin 1089.
b) Conjecture : quel que soit le nombre de départ, on obtient 1089 à la fin de l'étape 4.

2. **Entrée** :
n est un entier naturel
Initialisation :
Donner à *a* la valeur 0
Donner à *b* la valeur 0
Donner à *c* la valeur 0
Traitement :
Tant que $n \geq 100$
Affecter à a la valeur $a + 1$
Affecter à *n* la valeur $n - 100$
Fin Tant que
Tant que $n \geq 10$
Affecter à *b* la valeur $b + 1$
Affecter à *n* la valeur $n - 10$
Fin Tant que
Affecter à *c* la valeur *n*
Sortie :
Afficher *a*
Afficher *b*
Afficher *c*

3. **a)** $abc = a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0$.

b) Le nombre obtenu après l'étape 1 est : $c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0$.

c) Le nombre obtenu après l'étape 2 est :$(c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0) - (a \times 10^2 + b \times 10^1 + c \times 10^0)$
soit $99(c - a)$.
Or, $(c - a - 1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + a - c = 99(c - a)$

d) Le nombre obtenu après l'étape 3 est : $(10 + a - c) \times 100 + 9 \times 10 + c - a - 1$
et : $[(10 + a - c) \times 100 + 9 \times 10 + c - a - 1] + [(c - a - 1) \times 100 + 9 \times 10 + 10 + a - c] = 1089$

II – L'algorithme de Kaprekar

1. **a)** K(198) = 981 – 189 = 792
K(357) = 753 – 357 = 396
K(495) = 954 – 459 = 495

b) **Entrée** :

n est un entier naturel

Initialisation :

Donner à a la valeur 0
Donner à b la valeur 0
Donner à c la valeur 0

Traitement :

Tant que $n \geq 100$
    Affecter à a la valeur $a + 1$
    Affecter à n la valeur $n - 100$
  Fin Tant que
Tant que $n \geq 10$
    Affecter à b la valeur $b + 1$
    Affecter à n la valeur $n - 10$
Fin Tant que
Affecter à c la valeur n
Si $a < b$ alors
    Si $b < c$ alors
        $K = (100c + 10b + a) – (100a + 10b + c)$
    Sinon
        Si $a < c$ alors
            $K = (100b + 10c + a) – (100a + 10c + b)$
        Sinon
            $K = (100b + 10a + c) – (100c + 10a + b)$
        Fin de Si
    Fin de Si
Sinon
    Si $a < c$ alors
        $K = (100c + 10a + b) – (100b + 10a + c)$
    Sinon
        Si $b < c$ alors
            $K = (100a + 10c + b) – (100b + 10c + a)$
        Sinon
            $K = (100a + 10b + c) – (100c + 10b + a)$
        Fin de Si
    Fin de Si
Fin de Si

Sortie :

Afficher K

2. Avec 198, on obtient 792 puis toujours 495.
Conjecture : quel que soit le nombre de départ, on obtient 495 après plusieurs itérations.

3. **a)** Les rôles des variables a, b et c sont symétriques, on peut donc supposer que $a < b < c$ sans perdre de généralité.

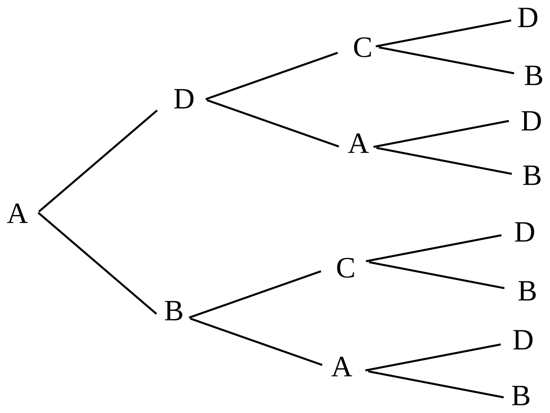
b) $K(n) = (100c + 10b + a) – (100a + 10b + c) = 99(c – a)$.

c) $c – a$ est un entier compris entre 2 et 8.
K(n) peut donc prendre les valeurs 198, 297, 396, 495, 594, 693 et 792.
Si on applique l'algorithme de Kaprekar autant de fois que nécessaire aux entiers précédents, on obtient toujours 495 au bout d'un certain nombre d'itérations :
198 – 792 – 693 – 594 – 495 ; 297 – 693 – 594 – 495 ; 396 – 594 – 495 ; 495 ; 594 – 495 ;
693 – 594 – 495 ; 792 – 693 – 594 – 495.
On constate que le nombre 495 est atteint en cinq itérations au maximum.

EXERCICE II

Eléments de correction

Partie A



1) ***a)*** Oui, par exemple avec la marche : $A \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow B$

b) B ou D d'après l'arbre de choix suivant :

c) Par généralisation de l'arbre ci-contre, les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre pair de déplacements sont : A et C

d) Les arrivées possibles pour les marches contenant un nombre impair de déplacements sont : B et D

2) A l'aide l'arbre ci-contre : $P(A_2) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

3)

Nombre de déplacements de la marche	1	2	3	4	5
Probabilité que la coccinelle arrive en A	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0

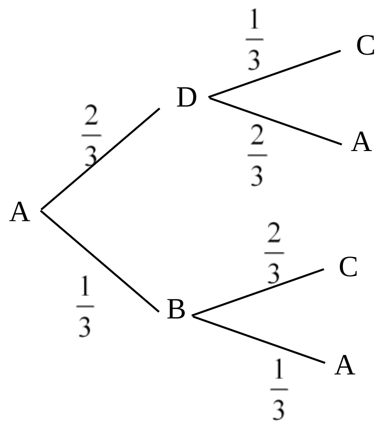
$P(A_2) = \frac{1}{2}$ d'après 2)

$P(A_1) = P(A_3) = P(A_5) = 0$ d'après 1) d)

$P(A_4) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$ car il y a 8 marches possibles de 4 déplacements. Chaque déplacement a une probabilité de $\frac{1}{2}$

(2ème justification : Suite à 4 déplacements, il n'y a que deux arrivées possibles A ou C qui sont équiprobables donc $\frac{1}{2}$)

Partie B



1) D'après l'arbre ci-contre :

a) $P(A_2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \frac{5}{9}$

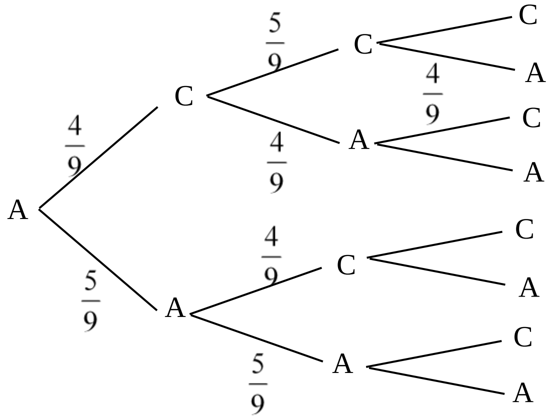
b) $P(C_2) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{4}{9}$ ou bien $P(C_2) = 1 - P(A_2)$

Suite à deux déplacements, on remarque que la probabilité de revenir sur le même sommet est $\frac{5}{9}$ et la probabilité d'arriver sur le sommet opposé est $\frac{4}{9}$

2) L'arbre ci-après illustre l'ensemble des marches tous les deux déplacements :

a) $P(A_4) = \frac{4}{9} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} = \frac{16}{81}$

b) $P(A_6) = \frac{4}{9} \times \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} = \frac{80}{729}$



3) ***a)*** En raisonnant toujours tous les deux déplacements, la seule marche possible pour que la coccinelle arrive en A en effectuant exactement $2n$ déplacements est :

$$A \to \underbrace{C \to C \to \ldots\ldots\ldots\ldots \to C}_{n-2 \text{ fois}} \to A$$

C'est-à-dire que la coccinelle doit se rendre une première fois sur le sommet opposé à A, revenir sur le même sommet C (n- 2) fois et enfin revenir sur le sommet opposé A.

On obtient donc $P(A_{2n}) = \frac{4}{9} \times \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-2}} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} = \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-2}} \times \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right)^{2}$

b)
$$\begin{aligned}
P(G_{2n}) &= P(A_2) + P(A_4) + P(A_6) + \ldots + P(A_{2n}) \\
&= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} + \frac{4}{9} \times \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} \times \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}} + \ldots\ldots + \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-2}} \times \left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{9}}\right)^{2} \\
&= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2} \left[\mathbf{1} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}} + \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{2} + \mathbf{\ldots\ldots} + \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-2}}\right] \\
&= \frac{5}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-1}}}{1 - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}}\right] \\
&= \frac{5}{9} + \frac{4}{9}\left[\mathbf{1} - \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-1}}\right] \\
&= 1 - \frac{4}{9} \times \left(\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{9}}\right)^{\mathbf{n-1}}
\end{aligned}$$

c) $P(G_{2n}) \geq 0{,}9999$ à partir de $n = 16$ donc 32 déplacements.