ministère éducation nationale
ÉduSCOL [dgesco]
Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

Mathématiques

Lycée

Ressources pour la classe de seconde

- Notations et raisonnement mathématiques -

Juillet 2009

eduscol.education.fr/ D0015

NOTATIONS ET RAISONNEMENT MATHÉMATIQUES

SOMMAIRE

I. Introduction

1. Place de la logique dans les programmes

Depuis 1969, les différents programmes mentionnent la place de l'enseignement de la logique dans l'acquisition des connaissances. En 1969, le langage des ensembles était un objet d'apprentissage qui n'est plus apparu aussi explicitement dans les programmes ultérieurs. On retrouve néanmoins un point commun important à tous ces programmes : tout exposé de logique mathématique est exclu.
L'étude des formes diverses de raisonnement et la nécessité de distinguer implication mathématique et causalité sont essentielles à la formation mathématique. Cette acquisition doit être répartie tout au long de l'année, lorsque les situations étudiées en fournissent l'occasion et il n'est pas question de traiter la logique dans un chapitre spécifique.

2. Logique et raisonnement

Dans le nouveau programme, il est mentionné que « l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant... Mais tout exposé de cours sur ces notions est exclu, les notations et le vocabulaire mathématique étant des conquêtes de l'enseignement et non des points de départ. » A la fin du programme, un certain nombre de notions à travailler sont détaillées.
Dans ce document, nous ne reviendrons pas sur les différents types de raisonnement, le document ressource du collège restant à ce sujet une référence indispensable à consulter sur le site www.eduscol.education.fr.

II. Programme et éléments de logique ou de raisonnement

La logique et le raisonnement concernent chaque partie du programme : fonctions, géométrie, statistiques et probabilités. Mais certaines notions sont plus faciles à appréhender dans un domaine plutôt qu'un autre. Ce paragraphe propose, sous forme d'exemples, une intégration possible de ces notions dans les différents domaines.

1. Fonctions

1.1. Notion d'ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion

Exemple 1

Soit (O, I, J) un repère orthonormal d'unité 1 cm. On considère les points suivants :

A(2 ; 5,5), B(1,1 ; 1,21), $C(\sqrt{3};2\sqrt{3})$, $D(\frac{2}{3};\frac{3}{2})$, E(–1,21 ; –1,1) et $F(-\frac{5}{3};-8)$.

Parmi ces points, quels sont ceux dont les coordonnées vérifient la relation : $x^2 + y^2 = 25$?
Placer dans le repère d'autres points dont les coordonnées vérifient cette relation.

L'objectif de cet exemple est de faire comprendre la notion d'appartenance à un ensemble, ici un ensemble de points défini analytiquement. Cet exemple unique est insuffisant. Un scénario possible d'exploitation dans la classe peut être de grouper les élèves et de proposer différentes relations du type : $3x - 2y + 5 = 0$; $xy = 1$; $y = x^2$; $x = y^2$; $3x + 5 = 0$… chaque groupe choisissant une relation différente.
À cette occasion, la définition de la courbe représentative d'une fonction peut être travaillée ou reprise.

Exemple 2

Compléter le tableau suivant donnant trois traductions de chaque énoncé, sachant que x est un nombre réel :

Intervalle	Inégalités	Langue naturelle
$x \in [3, 5]$		
		x appartient à l'ensemble des réels inférieurs ou égaux à 6
	$2 \leq x$	

Dans cet exemple, il s'agit de proposer aux élèves différents registres pour traduire une inégalité. Une quatrième colonne peut être introduite pour représenter l'intervalle sur la droite des réels.
Par la suite, lorsque l'élève sera confronté à un énoncé plus difficile et s'il en ressent le besoin, le professeur pourra l'inviter à revenir sur les différentes traductions d'une même propriété, conformément à cet exercice de référence.

Par exemple, la compréhension de l'énoncé suivant,
« Soit x un nombre réel qui vérifie $2{,}6 \leq x \leq 3{,}8$. Donner le meilleur encadrement possible de ce nombre par deux entiers »
suppose l'acquisition des compétences suivantes :

- savoir traduire les conditions « $x \geq 2{,}6$ et $x \leq 3{,}8$ » en termes d'intervalle ou de positionnement des réels sur la droite des réels ;
- comprendre que l'intervalle $[2{,}6\ ;\ +\infty[$ est inclus dans l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ (c'est-à-dire avoir conscience de la transitivité de l'inégalité) et que l'intervalle $]-\infty\ ;\ 3{,}8]$ est inclus dans l'intervalle $]-\infty\ ;\ 4]$.

1.2. Explicitation des quantifications

Les élèves ont fréquemment rencontré au collège des énoncés comportant des quantifications implicites. C'est le cas, par exemple :

- dans l'énoncé de règles de calcul dans le programme de 5e
- dans la présentation des identités remarquables

En classe de seconde, l'explicitation des quantifications doit être faite dans l'optique d'aider les élèves à mieux comprendre les énoncés. Elle ne doit pas être systématique mais doit être faite dès qu'il peut y avoir ambiguïté de la situation proposée. Il est inutile de compliquer les notations lorsque ce n'est pas utile à la compréhension.
Les quantificateurs seront introduits en situation progressivement tout au long de l'année, la langue naturelle et le langage symbolique devant coexister pendant toute l'année.
Les étapes « comprendre la nécessité de quantifier », « être capable d'expliciter les quantifications » et « être capable de rédiger avec des quantificateurs » sont des étapes différentes ; la dernière étant un objectif de fin de lycée et non de la classe de seconde.
Il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande.

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
(*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à $2x + 5$*)
L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
(*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux ?*)
Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
(*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

Exemple 4

L'énoncé : « si $x^2 > 1$ alors $x > 1$ » est-il vrai ?

Ici, il s'agit de faire prendre conscience de la nécessité de ***préciser le contexte de la proposition conditionnelle***, c'est-à-dire l'ensemble auquel appartient x pour pouvoir donner la valeur vraie ou fausse à cet énoncé. En effet, si x est un nombre positif, l'énoncé est vrai, si x est un réel, l'énoncé est faux et un contre-exemple est facilement trouvé.
La nécessité de ce type de précision se retrouve dans la modélisation d'une situation où il est nécessaire de préciser le domaine de définition de la variable.

Certains élèves n'interprètent pas de la même façon les phrases suivantes :
« si $x \leq -1$ alors $x^2 \geq 1$ » et « $x^2 \geq 1$ si $x \leq -1$ ». La première est déclarée vraie, la deuxième est déclarée fausse, comprise à tort comme « $x^2 \geq 1$ si et seulement si $x \leq -1$ ». Cette confusion provient du sens commun dans la langue naturelle. La résolution d'équations et inéquations et le travail sur des encadrements à partir de courbes et de tableaux de variations de fonctions sont des occasions pour préciser la signification de ces phrases.

Exemple 5

Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.
En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propriétés suivantes, si elle est vraie ou fausse.
a. Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3 ; 3]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0.
b. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f négative.
c. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f strictement inférieure à 3.

x	-3		-1		3
$f(x)$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2

1.3. Implication et équivalence

Exemple 6[1]

A. Voici deux propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $(a+b)^2 = 0$ $\qquad\qquad$ $\boxed{2}$ $a = 0$ et $b = 0$

Si a et b sont des nombres réels tels que la proposition $\boxed{2}$ est vraie, alors la proposition $\boxed{1}$ est vraie. On note : pour a et b réels, $\boxed{2} \Rightarrow \boxed{1}$ et on dit que, pour a et b réels la proposition $\boxed{2}$ implique la proposition $\boxed{1}$.

Est-il vrai que pour a et b réels, la proposition $\boxed{1}$ implique la proposition $\boxed{2}$?

B. Voici quelques propositions où a et b désignent des nombres réels :

$\boxed{1}$ $a^2 = b^2$	$\boxed{2}$ $a = b$	$\boxed{3}$ $a = -b$
$\boxed{4}$ $(a+b)(a-b) = 0$	$\boxed{5}$ $a = b$ ou $a = -b$	$\boxed{6}$ $a = 0$ ou $b = 0$

a. Quelles sont les implications du type $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{..}$, vraies pour a et b réels ?
b. Quelles sont les implications du type $\boxed{..} \Rightarrow \boxed{1}$, vraies pour a et b réels ?
c. Quelles sont les propositions équivalentes pour a et b réels ?
d. Application : résoudre l'équation $(2\,x-3)^2 = (2\,x+9)^2$.

Cet exemple peut être traité en utilisant la représentation de la fonction carré et des fonctions polynômes de degré 2. Un débat oral, par groupes ou collectivement, permet de faire prendre conscience de la signification des termes « et » et « ou ».
Le plus important est de faire émerger les conceptions des élèves sur l'implication, terme utilisé fréquemment dans la langue naturelle (s'impliquer dans une démarche, impliquer les autres membres d'un groupe dans un travail, par exemple). Une fois assimilé, cet exemple peut devenir un exemple de référence pour les résolutions d'équations.

2. Géométrie

Le travail sur le raisonnement en géométrie, initié au collège, est stabilisé et consolidé en classe de seconde avec, en perspective, une démarche de modélisation de situations concrètes. Les élèves sortant de collège sont habitués à manipuler des énoncés contenant une implication correspondant à un raisonnement logique. La proposition réciproque d'une proposition conditionnelle a aussi été rencontrée (comme la réciproque du théorème de Pythagore) mais n'était pas un exigible du collège. La reprise de certains résultats vus au collège peut fournir l'occasion d'approfondir la notion d'implication.
Des mises au point sur la notion d'implication et des exemples sont également proposés dans le paragraphe III.

2.1. Condition nécessaire, condition suffisante

L'étude de problèmes d'alignement de points, de parallélisme ou d'intersection de droites, de reconnaissance des propriétés d'un triangle ou d'un polygone, comme le préconise le programme, est l'occasion de travailler les conditions suffisantes. En effet, si conjecturer que des points sont alignés, à l'aide d'un logiciel de géométrie par exemple, est une tâche accessible à beaucoup d'élèves, établir la preuve de cette conjecture est souvent difficile. La recherche de cette preuve suppose d'avoir « l'idée du ou des théorèmes » à appliquer. Une des aides possibles est d'apprendre aux élèves à raisonner par conditions suffisantes : que suffit-il de savoir si la conclusion à obtenir est l'alignement de trois points ? Il peut être suffisant de montrer par exemple que ces points appartiennent à une droite particulière d'un triangle, ou bien que les coordonnées de ces trois points vérifient une même équation de droite, ou bien que deux des vecteurs formés par ces trois points sont colinéaires. Par chaînage arrière (c'est-à-dire en continuant à raisonner par conditions suffisantes), on risque de rencontrer des pistes de solution qui n'aboutissent pas. Certaines méthodes seront

[1] Exemple issu de la brochure APMEP « pour les mathématiques vivantes en seconde »

écartées, soit parce qu'elles ne peuvent être mises en œuvre, soit en raisonnant par conditions nécessaires.

Exemple 7

- Soit ABCD un parallélogramme de centre O. Les milieux des côtés [BC] et [CD] sont notés respectivement I et J.
- Que peut-on dire de la position du point d'intersection de la droite (AC) et de la droite (IJ) ?

Ici, il s'agit de montrer qu'un point est le milieu d'un segment donné. Le professeur pourra inciter l'élève à explorer les différentes méthodes qu'il connaît pour prouver qu'un point est le milieu d'un segment. Suivant le contexte, ce dernier peut chercher les coordonnées de ce point et vérifier que ce sont bien celles du milieu du segment ; il peut aussi chercher si c'est effectivement le point d'intersection d'un côté d'un triangle et d'une droite parallèle à un autre côté ou bien encore chercher à démontrer que c'est le point d'intersection de diagonales d'un parallélogramme.

Il est également possible de revoir certains des énoncés de géométrie appris au collège et d'expliciter s'ils expriment une condition nécessaire, une condition suffisante ou une propriété caractéristique.

Exemple 8

- Voici un énoncé de classe de cinquième :
- « Chaque médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire »
- Exprimer une condition suffisante pour qu'une droite partage ce triangle en deux triangles de même aire. Cette condition est–elle nécessaire ?

Pour démontrer que cette condition est nécessaire, un raisonnement par l'absurde est possible. On admet ici qu'une droite qui partage le triangle en deux triangles passe nécessairement par un sommet, une justification intuitive pouvant être acceptée.
On peut alors faire remarquer que l'on a obtenu deux propriétés qui peuvent s'énoncer comme suit.
Propriété 1
Soit ABC un triangle. Si une droite D est une médiane de ce triangle, alors elle partage ce triangle en deux triangles de même aire.
Cette propriété correspond à une condition suffisante pour partager un triangle en deux triangles de même aire.
Propriété 2
Soit ABC un triangle. Si D est une droite qui partage le triangle en deux triangles de même aire, alors D est une médiane de ce triangle.
Cette propriété correspond à une condition nécessaire pour partager un triangle en deux triangles de même aire[2].

On peut faire observer que les deux propriétés précédentes peuvent être regroupées dans un énoncé commun sous la forme suivante :
Soit ABC un triangle. Une droite D du plan est une médiane du triangle ABC si et seulement si elle le partage en deux triangles de même aire.
Il est ensuite possible de revenir sur la notion de propriété caractéristique rencontrée au collège.

[2] pour en savoir plus sur les aires,
se référer à l'article de D. Perrin (2006), Aires et volumes : découpage et recollement,
euler.acversailles.fr/webMathematica/reflexionpro/conferences/perrin/iprdp.pdf

2.2. Appartenance d'un point à une droite

Un travail analogue à celui sur les courbes peut être fait avec les questionnements suivants :
- trouver les coordonnées de points d'une droite connaissant son équation.
- reconnaître qu'un point appartient à une droite.

3. Statistiques et probabilités

3.1. Réunion et intersection

Les symboles d'union et intersection sont introduits en liaison avec les conjonctions « ou » et « et », en comparant leur sens mathématique avec leur usage dans la langue courante.
On pourra utiliser des diagrammes de Venn qui permettent de mieux visualiser les ensembles.

Exemple 9

Un club sportif propose des cours de judo et des cours de karaté. On note :
A le groupe des adhérents inscrits au judo
B le groupe des adhérents inscrits au karaté.
C le groupe des adhérents inscrits au judo et au karaté.
D le groupe des adhérents inscrits au judo ou au karaté.
E le groupe des adhérents inscrits à un seul de ces deux sports.
Farid s'est inscrit uniquement au karaté, Katia uniquement au judo, et Léo s'est inscrit aux deux cours.
De quels groupes A, B, C, D ou E chacun fait-il partie ?
Myriam est dans le groupe D. Fait-elle partie du groupe des adhérents inscrits au judo ?

3.2. Négation

Expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions : des exemples sont donnés dans la partie III.

III. Langage courant et langage mathématique

1. Langage courant explicite et implicite

« Si tu es sage, tu auras des bonbons ». Le sens commun laisse penser que l'enfant qui reçoit des bonbons a été sage. Il est important de montrer sur un exemple ou deux que cette logique tient compte du contexte, du ton employé par l'interlocuteur et de la sémantique.

Exemple 10

Paroles d'un père à son enfant :
(1) « Si la température dépasse 25° alors tu pourras aller te baigner ». L'enfant aura-t-il la permission de se baigner s'il fait 20° ? s'il fait 28° ?
(2) « Tu pourras aller te baigner si la température dépasse 25°».
Est-ce que les phrases (1) et (2) ont la même signification dans le langage courant ?

Suivant la logique mathématique, il est clair que l'enfant pourra se baigner s'il fait 28° et qu'on ne sait pas ce que son père décidera s'il fait 20°. Cependant en langage courant le « si » de la phrase (1) signifie en général « seulement si » et dans la seconde phrase (2) il peut signifier « si et seulement si ».
D'un point de vue mathématique, les phrases (1) et (2) sont équivalentes mais dans le langage courant, l'ordre des propositions a une influence sur la compréhension que l'on a de la phrase. D'autres éléments interviennent aussi, comme l'intonation et le degré de crédibilité de la personne qui parle, ou encore le principe du « maximum d'information » selon lequel celui qui parle est supposé expliciter clairement sa pensée.

2. Implication mathématique

Deux grands types d'implication sont mis en œuvre :

- les implications correspondant à une inclusion (ou de type ensembliste) ;
- les implications correspondant à un raisonnement logique (faisceau d'informations permettant d'en déduire une conclusion).

Pour ce deuxième type, il est intéressant de faire un parallèle entre les situations issues de la vie courante et le transfert vers les situations mathématiques.

Exemple 11[3]

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.
1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.
Est-il cosmonaute américain?
2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.
Est-il cosmonaute américain?
3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.
Porte-t-il une chemise rouge ?
4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.
Porte-t-il une chemise rouge ?

L'énoncé qui permet le raisonnement peut s'écrire de manière analogue à un théorème tel que l'apprend un élève de collège : « Soit un cosmonaute. S'il est américain, alors il porte une chemise rouge. ».
Les questions 2 et 3 sont difficiles car la bonne réponse « on ne peut pas savoir » est peu rencontrée dans un cours de mathématiques, sauf dans les exercices de « vrai- faux ». Ce type de question revient à se poser la question de la vérité de la proposition réciproque d'un énoncé.

Cet exercice peut être repris avec des énoncés de géométrie de collège comme par exemple dans l'exemple suivant où l'énoncé proposé est : «Soit un quadrilatère ABCD. Si ABCD est un rectangle, alors ses diagonales ont même longueur ».

Exemple 12

1. Les diagonales d'un quadrilatère mesurent 3 cm et 5 cm. Est-ce un rectangle ?
2. On sait que ABCD est un parallélogramme. Est-ce un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur ?
3. Un quadrilatère a des diagonales de même longueur. Est-ce un rectangle ?
4. Un quadrilatère a trois angles droits. A-t-il des diagonales de même longueur ?

Dans le langage courant, les locutions « il faut », « il suffit » ont souvent une utilisation différente de celle qu'elles ont en mathématiques et les connecteurs « donc », « or » ne sont pas utilisés conformément à la logique mathématique. Un travail en coordination avec l'enseignant de lettres peut s'avérer tout à fait approprié. Dans le cadre de ce travail, il peut être aussi intéressant de comparer l'argumentation en français où il est demandé d'apporter et de développer un certain nombre d'arguments de manière parallèle avant de conclure et le raisonnement déductif en mathématiques où chaque conclusion intermédiaire est réutilisée, si elle n'est pas la conclusion finale.

[3] Exemple issu de l'article « les cosmonautes » de Marc Legrand, Petit *x* n°1

3. « ou, et, un »

Certains mots tels que « et », « ou », « un » n'ont pas toujours la même signification dans le langage courant et dans leur utilisation en mathématique. Il est important d'attirer l'attention des élèves sur les similitudes et les différences de leur emploi dans ces deux domaines.

3.1. « ou, et »

Exemple 13

Sur le menu du restaurant scolaire il est écrit : fromage ou yaourt. Est-il permis de prendre une portion de fromage et un yaourt ?

Il est clair qu'ici le « ou » est exclusif alors que le « ou » mathématique est par défaut inclusif.
Dans la résolution des équations-produit, on écrit :

« $A(x) \times B(x) = 0$ si et seulement si $A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$ ».

Cela peut être une occasion de travailler le sens du « ou » mathématique si on propose des situations dans lesquelles les deux facteurs sont simultanément nuls.

Le lien entre les connecteurs « et » et « ou » nécessite aussi d'être explicité.

Exemple 14

Tous les élèves qui suivent l'option théâtre ou l'option danse participeront au spectacle de fin d'année.
1. Sophie suit les deux options, participera-t-elle au spectacle ?
2. Les deux phrases suivantes : « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>ou</u> l'option danse » et « Tous les élèves qui suivent l'option théâtre <u>et</u> tous ceux qui suivent l'option danse » désignent-elles les mêmes élèves ?

La première question met en évidence que l'intersection de deux ensembles est incluse dans leur réunion.
La seconde question montre une utilisation du mot « et » en langue naturelle qui correspond à une réunion.
Une analogie peut être faite avec l'emploi des mots « et » et « ou » dans la phrase suivante :
« $A(x) = 0$ si et seulement si $x = 1$ **ou** $x = 2$
donc les solutions de l'équation $A(x) = 0$ sont 1 **et** 2. ».

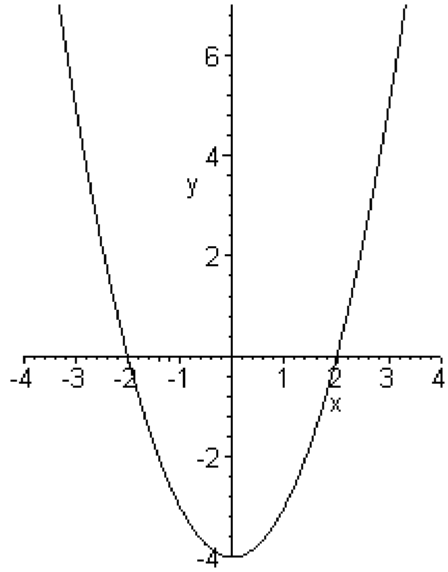
3.2. « un »

Le mot « un » a plusieurs significations en langage courant comme en mathématiques :
- le nombre qui sous-entend « exactement un » comme dans la phrase « le prix d'un sandwich est deux euros » qui veut dire que « pour deux euros, on n'a effectivement qu'un seul sandwich » ;
- l'article indéfini qui signifie « au moins un » comme dans la phrase« pour la sortie de demain, emporte un sandwich » : il est tout à fait possible d'en emporter plusieurs ;
- l'article indéfini qui signifie « tout » comme dans la phrase « un sandwich est composé de pain et d'autres ingrédients »
- « un parmi d'autres » comme dans la phrase « je cherche un sandwich sans mayonnaise ».

En mathématiques, la bonne interprétation du mot « un » est indispensable pour pouvoir interpréter correctement les énoncés.
« Un parallélogramme a ses diagonales qui se coupent en leur milieu » : ici, un est l'article indéfini qui signifie « tout ». Par contre, dans la phrase « ABCD est un parallélogramme », le mot « un » a le sens de « un parmi d'autres ».

Exemple 15

> La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur R, $f : x \mapsto x^2 - 4$.
> Existe-t-il un nombre qui a pour image 3 par f ?



Les élèves qui interprètent « un » comme « exactement un » répondent FAUX puisqu'il y a deux nombres qui ont pour image 3 par *f*. Il convient donc d'attirer leur attention sur le fait qu'en l'absence de précision « un »peut signifier « au moins un » dans ce type d'énoncé.

4. Négation

Comme cela a été dit dans la partie II, expliciter des événements contraires peut être l'occasion de nier des propositions : par exemple, écrire l'événement contraire de « tous les murs de la pièce sont blancs » ou encore « le temps est chaud et humide ».

Ce type d'exercice, nouveau et délicat, pourra faire l'objet d'un entraînement tout au long de l'année.

IV. Pour conclure

Il est exclu de consacrer un chapitre à ces notions de logique et raisonnement. Il s'agit de procéder par petites touches présentées sous forme de bilan, de synthèse ou de généralisation.
La langue naturelle et le langage symbolique doivent coexister tout au long de l'année, l'apprentissage du langage symbolique devant être étalé sur le cycle terminal.
Il s'agit de profiter des questions, des erreurs des élèves ou des situations évoquées pour faire émerger et approfondir les notions de logique. L'objectif est que l'élève dispose d'exemples de référence à partir d'objets connus, qu'il pourra réutiliser dans d'autres domaines.
Les notions de condition nécessaire et condition suffisante sont difficiles pour les élèves de seconde ; il s'agit dans un premier temps de revoir des propriétés ou théorèmes étudiés au collège afin de travailler les notions de condition nécessaire et condition suffisante dans un contexte mathématique connu.
Les notions de réunion, intersection et inclusion ont été rencontrées lors du travail sur les intervalles. Ici, il s'agit de faire le lien entre «et », « ou » et les symboles $\cap$ et $\cup$. Il faut rappeler que dans le programme de seconde pour la rentrée 2009, ***le travail sur les intervalles***, comme le travail sur les notations et le raisonnement, ne fait pas l'objet d'un chapitre et ***ne doit pas être le thème d'un cours spécifique***.

1. La question des traces écrites

Comme le rappelle le document ressource sur le raisonnement et la démonstration au collège (site www.eduscol.education.fr), une part non négligeable des élèves arrivant en seconde sont aptes à conduire des raisonnements sans pour autant les produire par écrit sous une forme aboutie. L'objectif du travail fait sur la logique et le raisonnement au cours de l'année de seconde est de les conduire peu à peu à mieux comprendre la logique mathématique et à s'approprier notations et vocabulaire. L'introduction du programme le précise : le raisonnement et le langage mathématique doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. Mais quelle trace écrite peut alors être notée par les élèves ? Une des pistes possibles prend appui sur le fait que certains exemples traités au cours de l'année peuvent servir d'exemples de référence. On peut donc prévoir une partie du cahier ou du classeur dans laquelle l'élève note ce qu'il a appris en traitant tel ou tel exercice. Cet écrit peut être à la charge de l'élève seul (ce peut être un travail donné à la maison) ou bien pris en charge collectivement. La mise en forme peut alors être faite par l'enseignant à partir des propositions des élèves. Rappelons qu'un cours sur la logique est bien entendu exclu.
La trace écrite est aussi celle que l'élève produit lorsqu'il rédige un travail de recherche : réorganiser ses idées, essayer de les mettre en forme en choisissant des notations qui lui permettent d'être précis. Ce type d'écrit ne peut en aucun cas être soumis à un protocole rigide et doit être varié (plan de la solution, rédaction d'une partie d'un travail cherché en groupes, rédaction d'une démonstration cherchée collectivement) afin de permettre à tous de s'engager dans la restitution.
Il y a des différences entre ce qui est dit et ce qui est écrit. Si l'enseignant annonce toujours ce qu'il est en train de faire (comme par exemple, résoudre une équation dans l'ensemble des réels ou résoudre une inéquation par lecture graphique), il est fréquent de ne pas trouver de telles indications au tableau et il est rare de les trouver dans les notes des élèves. Cela ne pose pas de problème lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. En revanche, il est important de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité et de l'intérêt de certaines explicitations, et de les amener progressivement à préciser leur démarche lorsqu'ils rédigent la solution d'un problème. Toutefois cette exigence, qui n'est pas une fin en soi, ne peut être prise en compte par les élèves que si on leur a laissé le temps de comprendre les concepts et de chercher : ainsi, l'écriture formalisée d'une démonstration ne prend du sens que lorsque les élèves ont bien compris les différents statuts d'un énoncé, la notion d'implication et qu'ils ont trouvé une piste pour la résolution.

2. Pistes pour l'évaluation

Les compétences évoluées « raisonner, démontrer, élaborer une démarche » ou « développer une démarche connue, mettre en forme un raisonnement » sont des compétences évaluées au baccalauréat dans toutes les séries. Il convient donc d'évaluer progressivement dès la classe de seconde les apprentissages sur la logique et le raisonnement. Mais comment y répondre ?
L'évaluation peut être faite à l'oral. Etre capable de reformuler de manière mathématique un énoncé est une compétence qu'il convient de faire acquérir dans le dialogue et le débat.
A l'écrit, de la même manière qu'au collège, deux principes essentiels doivent être retenus :

- distinguer le fond de la forme
- valoriser des écrits intermédiaires (cf. document ressource collège).

Dans la mesure où on rend les élèves attentifs à la nécessité de préciser ce dont ils parlent, il semble essentiel de valoriser les efforts de clarté et d'explicitation. On peut envisager une valorisation sous forme de bonus.